

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

МАЛІ КОЛИВАННЯ.

I. ЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ

Навчально-методичний посібник

Харків – 2016

УДК 534.014.1(075.8)

ББК 22.21я73

М 18

Рецензенти:

Є. С. Сиркін – доктор фіз.-мат. наук, провідний наук. співр. ФТІНТ НАН України, професор кафедри загальної та експериментальної фізики Харківського національного університету «ХП»;

О. М. Єрмолаєв – доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри теоретичної фізики імені академіка І. М. Ліфшиця Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

*Затверджене до друку рішенням Науково-методичної ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № 8 від 23.10.2015 р.)*

Ковальов О. С.

М 18 Малі коливання. І. Лінійні коливання : навч.-метод. посіб. / [О. С. Ковальов, О. В. Єзерська, З. О. Майзеліс, Т. С. Чебанова]. – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2016. – 112 с.

Даний навчально-методичний посібник призначений студентам фізичних спеціальностей, які вивчають теоретичну механіку, і містить приклади та задачі, розв'язок яких сприяє більш глибокому розумінню фізичних ідей механіки, розвитку необхідних практичних навичок у виконанні завдань з теорії лінійних коливань.

УДК 534.014.1(075.8)

ВБК 22.21я73

© Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 2016

© Ковальов О. С., Єзерська О. В.,

Майзеліс З. А., Чебанова Т. С., 2016

© Макет обкладинки Дончик І. М., 2016

ЗМІСТ

Передмова.....	4
1. Лінійні коливання систем з одним ступенем свободи.....	6
1.1. Частоти лінійних коливань.....	6
1.2. Доповнення до розділу 1.....	10
1.3. Задачі до розділу 1.....	19
1.4. Задачі для домашніх завдань до розділу 1.....	22
2. Лінійні коливання систем з кількома ступенями свободи.....	25
2.1. Лінійні коливання в системі із двома ступенями свободи.....	25
2.1.1. Два лінійні взаємодіючі осцилятори.....	25
2.1.2. Довільна лінійна система із двома ступенями свободи.....	29
2.2. Доповнення до розділу 2.....	34
2.3. Задачі до розділу 2.....	62
2.4. Задачі для домашніх завдань до розділу 2.....	70
3. Динаміка лінійної системи з багатьма ступенями свободи.....	72
3.1. Доповнення до розділу 3.....	78
3.2. Задачі до розділу 3.....	80
3.3. Задачі для домашніх завдань до розділу 3.....	80
4. Динаміка лінійних одномірних ланцюжків.....	82
4.1. Однорідні лінійні ланцюжки.....	82
4.2. Лінійні ланцюжки з дефектами. Локальні коливання.....	89
4.3. Багатоатомні лінійні ланцюжки.....	94
4.4. Доповнення до розділу 4.....	97
4.5. Задача до розділу 4.....	106
4.6. Задачі для домашніх завдань до розділу 4.....	107
Використана література.....	110

ПЕРЕДМОВА

Тема «Малі коливання» посідає особливе місце в курсі теоретичної механіки. Цей розділ механіки найтісніше пов'язаний із проблемами фізики твердого тіла, оскільки багато задач з динаміки пружних систем, кристалічної решітки, магнітовпорядкованих і оптичних середовищ зводяться до дослідження простих коливальних моделей. У деяких випадках (просторово однорідне коливання кристалічної решітки або однорідна прецесія намагніченості в магнетіку) можна обмежитися розглядом простих моделей з одним ступенем свободи. В інших випадках слід враховувати наявність кількох ступенів свободи в рамках кінцеворозмірних динамічних моделей і навіть досліджувати системи з нескінченною кількістю змінних. Наявність багатьох ступенів свободи ускладнює теоретичний аналіз навіть у випадку лінійних коливань, а врахування слабких ангармонізмів приводить до появи принципово нових властивостей коливального руху. Основними труднощами в освоєнні цього матеріалу є математичні методи, що застосовуються в теорії. Підручники з класичної механіки (наприклад, «Механіка» Л. Д. Ландау та Є. М. Ліфшиця, [1]), як правило, містять як приклади фізично важливі, але досить складні задачі. З іншого боку, у збірниках задач з механіки (наприклад, «Збірник задач з класичної механіки» Г. Л. Коткіна й В. Г. Сербо, [15]) наведено велику кількість прикладів, але вони не супроводжуються розгорнутими коментарями та відомостями про відповідні проблеми. Це ускладнює самотійну роботу студентів. Даний навчально-методичний посібник покликаний певною мірою виправити цей недолік. Частина задач супроводжується докладними розв'язками та поясненнями. Є також матеріал для самотійних і контрольних робіт, індивідуальних розрахункових задач, домашніх завдань.

Пропонований посібник складається із трьох частин. У першій частині будуть розглянуті лінійні коливання з одним ступенем свободи, із двома ступенями свободи та з багатьма ступенями свободи. Кожний розділ містить доповнення, які не є просто розбором складних задач із коментарями. Ці частини є само важливими, як і основний текст розділів, але винесені окремо, щоб не захаращувати основний текст. До кожного розділу пропонуються задачі для самостійного розв'язку (до них подано тільки відповіді) і задачі для домашніх завдань (без відповідей).

У другій частині посібника передбачається розглянути слабо ангармонічні коливання, а саме, слабо нелінійні коливання систем з одним ступенем свободи, слабо нелінійні коливання систем із двома ступенями свободи, два зв'язані осцилятори Дюффінга, два зв'язані нелінійні ротатори, системи з нелінійною міжчастичковою взаємодією. Третю частину планується присвятити суто нелінійним коливанням: якісному дослідженню суттєво нелінійних коливань, точним розв'язкам, що описують коливання нелінійних систем, еліптичним функціям Якобі, а також впливу дисипації та зовнішніх полів на лінійні та нелінійні коливання.

Насамперед, треба визначити терміни «малі коливання» і «коливання з малою амплітудою». Малість амплітуди має на увазі малу зміну динамічної змінної (наприклад, зсуву частинки з положення рівноваги) до деякого характерного значення (див. задачі 1.2 і 1.3). Цей параметр з'являється тільки при врахуванні нелінійності в системі. Зокрема, у випадку математичного маятника малість кута відхилення ϕ маятника від положення рівноваги означає виконання нерівності $\phi \ll \pi$. При виконанні подібних нерівностей динамічні рівняння, що описують систему, можуть бути лінеаризовані. У загальному випадку це не завжди можливо: див. задачу 1.4. Лінійність рівнянь суттєво спрощує їхній розв'язок, але при цьому «за рамками» залишається питання про масштаби амплітуд, за яких застосовно те чи інше лінійне рівняння.

ЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ СИСТЕМ З ОДНИМ СТУПЕНЕМ СВОБОДИ

1.1. ЧАСТОТИ ЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ

Немає нічого простішого й нічого важливішого у фізиці, ніж задача про лінійний осцилятор. Ця задача має не тільки академічний інтерес.

У багатьох випадках, наприклад при резонансних дослідженнях твердих тіл, вони поміщаються в зовнішні однорідні поля. При цьому динаміка всіх частинок є однаковою і проблема зводиться до розгляду системи з одним ступенем свободи. У простому випадку одномірного руху частинки в декартових координатах функція Лагранжа системи (з одним ступенем свободи) має вигляд :

$$L = \frac{M\dot{X}^2}{2} - U(X), \quad (1.1)$$

де M – маса матеріальної точки. Підкреслимо, що вид цього лагранжиана не постулюється, а випливає із загальних принципів механіки (з однорідності та ізотропії нашого простору і принципу відносності Галілея).

При переході до узагальненої координати $X = X(q)$ лагранжиан (1.1) має бути записаним у вигляді

$$L = \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} - U(q). \quad (1.2)$$

Нагадаємо, що перетворення $X = X(q)$, яке стосується тільки координат, називається точковим перетворенням.

Розглядаючи будь-який випадок коливального руху, ми вважаємо що потенціальна енергія $U(q)$ має мінімум при $q = q_0$, тобто $U'(q_0) = 0$; $U''(q_0) > 0$. Але при цьому передбачається, що $a(q_0) > 0$, (див. задачу 1.6).

У загальному випадку лагранжиан має більш складну структуру, він не впливає з лагранжиана матеріальної точки в декартових коорди-

натах і може розглядатися як «феноменологічний лагранжиан», що відповідає тим або іншим динамічним рівнянням.

Введемо малі відхилення $x = q - q_0$ узагальненої координати q від положення рівноваги (мінімуму $U(q_0)$) і обмежимося квадратичними по x доданками в розкладанні потенціальної енергії:

$$U(q) \approx U(q_0) + \frac{1}{2}U''(q_0)(q - q_0)^2. \quad (1.3)$$

У рамках лінійного наближення слід залишити в кінетичній енергії лише квадратичні по q й \dot{q} доданки. Вводячи «ефективну масу» $m = a(q_0)$, яка збігається з масою M тільки в тому випадку, якщо x – декартова координата і параметр $k = U''(q_0) > 0$, перепишемо функцію Лагранжа в наступному вигляді:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \quad (1.4)$$

Рівняння руху, яке відповідає функції Лагранжа(1.4), має вигляд:

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (1.5)$$

Ортонормованим базисом розв'язків цього рівняння є гармонічні функції

$$x_1 = \sin \omega_0 t \text{ і } x_2 = \cos \omega_0 t, \quad (1.6)$$

а частота гармонічних коливань (власна частота осцилятора) –

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.7)$$

Загальний розв'язок рівняння (1.5) має вигляд:

$$x = a \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (1.8)$$

де a – амплітуда коливання і φ – його фаза. Коливання є ізохронним (його частота є постійною), а амплітуда не залежить від частоти. Як наслідок консервативності системи – збереження її енергії:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 a^2}{2}. \quad (1.9)$$

Замість розв'язків (1.6) і (1.8) можна формально використовувати комплексні величини

$$x_{1,2} = \exp(\pm i\omega_0 t), \quad (1.10)$$

оскільки залежність координати коливної системи від часу часто виявляється зручним представляти у вигляді дійсної частини комплексного виразу

$$x = \operatorname{Re}\{Ae^{i\omega_0 t}\}, \quad (1.11)$$

де A – комплексна стала. Якщо вибрати її у вигляді

$$A = ae^{i\varphi}, \quad (1.12)$$

ми отримаємо

$$x = a \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (1.13)$$

Нижче ми побачимо, що в деяких комплексних моделях, які описують обертання нелінійних ротаторів або магнітних моментів, комплексне представлення динамічних змінних є простим і природнім.

Рівняння динаміки гармонічного осцилятора другого порядку (1.5) можна переписати у вигляді системи двох диференціальних рівнянь першого порядку (рівнянь Гамільтона) для координати й імпульсу $p = m\dot{x}$:

$$\dot{x} = \frac{p}{m}; \quad (1.14)$$

$$\dot{p} = -kx, \quad (1.15)$$

які в підході Гамільтона записуються у вигляді

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad (1.16)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (1.17)$$

з гамільтоніаном

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}.$$

Динаміка системи в рамках рівнянь Гамільтона допускає просту й наочну інтерпретацію на т. зв. *фазовій площині*, де відкладені координата та імпульс системи з одним ступенем свободи. Для розглянутої простої системи картинка на фазовій площині (т. зв. *фазовий портрет*) виглядає так (рис. 1.1).

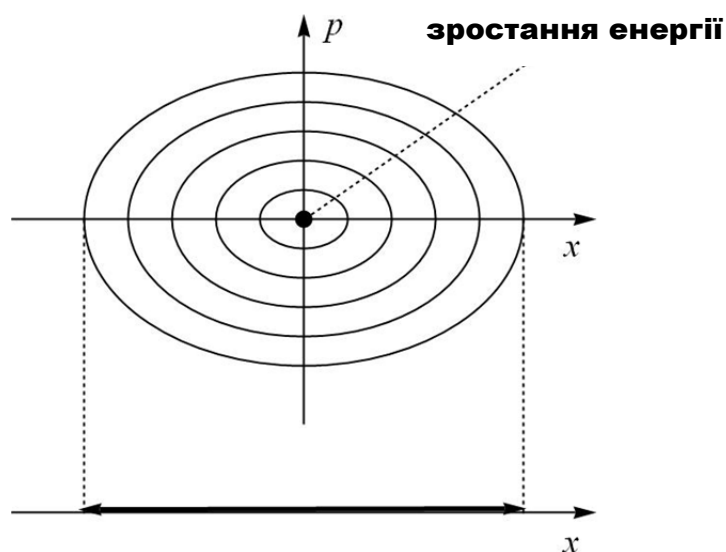


Рис. 1.1

На фазовому портреті «зображуюча точка» рухається по еліпсах, розмір яких зростає зі зростанням енергії коливання і які відрізають особливу точку (точку зупинки). У цьому випадку ця точка називається *особливою точкою* типу «центр». Проекція руху зображуючої точки у фазовому просторі на звичайний простір (який іноді називається *конфігураційним простором*) описує коливальний рух матеріальної точки. На рис. 1.1 – це проекція еліпса на координатну вісь x , яка показана горизонтальною стрілкою внизу.

На закінчення обговоримо ще один погляд на малі коливання. Введемо замість двох дійсних змінних (координати й імпульсу) в (1.14), (1.15) комплексну функцію

$$\psi = \sqrt{m\omega_0}x + \frac{ip}{\sqrt{m\omega_0}}. \quad (1.18)$$

Ця функція, а також комплексно спряжена їй $\bar{\psi}$ є класичними аналогами квантових операторів народження й знищення квантових

збуджень. У термінах введеної комплексної функції ψ рівняння коливання лінійного осцилятора виглядає зовсім просто:

$$i\dot{\psi} = \omega_0\psi. \quad (1.19)$$

Як вправа переконайтеся, що якщо розглядати величини ψ і $\bar{\psi}$ як узагальнені координати, то рівняння (1.19) і спряжене йому є рівняннями Ейлера – Лагранжа для наступного лагранжиана:

$$L = \frac{i}{2}(\dot{\psi}\bar{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\psi) - \omega_0\psi\bar{\psi}. \quad (1.20)$$

Далі за загальними правилами механіки знайдіть інтеграл руху «енергія», тобто знайдіть закон збереження енергії, який відповідає лагранжиану (1.20):

$$E = \omega_0\psi\bar{\psi}. \quad (1.21)$$

Як бачите, тут зникає простий поділ на кінетичну й потенційну енергії.

На закінчення хочемо звернути особливу увагу на рівняння (1.19). У даному розділі методичного посібника воно просто впливає з рівняння коливання лінійного осцилятора. Пізніше ви переконаєтеся, що це рівняння має більш глибокий зміст. Воно пов'язане з рівнянням обертання симетричного вівчка (рівнянням Ейлера) і рівнянням динаміки магнітного моменту (рівнянням Ландау – Ліфшиця). Багато складних проблем механіки легко вирішуються в рамках простих нелінійних і неконсервативних узагальнень цього рівняння.

Переходимо до розв'язку деяких стандартних задач, що стосуються теорії лінійних коливань. Частина задач, зібраних у доповненні до даного розділу, супроводжуються коментарями, а досвід показує, що іноді коментарі є важливішими і цікавішими, ніж першоджерело.

1.2. ДОПОВНЕННЯ ДО РОЗДІЛУ 1

1.1. Знайти частоти малих коливань системи, якщо її функція Лагранжа має вигляд:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}.$$

Розв'язок. У цьому випадку потенціальна енергія вже зведена до належного виду (1.4), так що власна частота осцилятора дорівнює

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

1.2. Знайти частоти малих коливань системи й умову малоамплітудності коливань, якщо її функція Лагранжа має вигляд:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + \frac{\alpha x^4}{4}.$$

Розв'язок. Графік потенціальної енергії

$$U = \frac{kx^2}{2} - \frac{\alpha x^4}{4}$$

має вигляд, зображений на рис. 1.2. Як і в попередньому завданні, частота малих коливань дорівнює

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

З рис. 1.2 видно, що в системі є характерний масштаб амплітуд коливань:

$$x_0 = \sqrt{\frac{k}{\alpha}}.$$

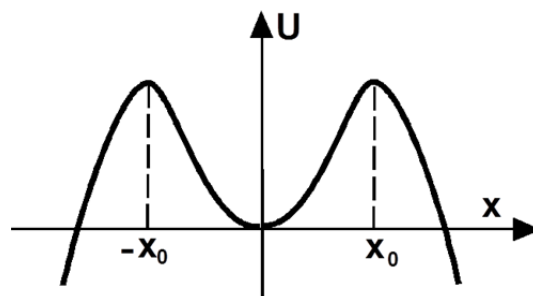


Рис. 1.2

Тому умова малоамплітудності коливань має вигляд:

$$x \ll \sqrt{\frac{k}{\alpha}}.$$

1.3. Знайти частоти малих коливань і умову їх малоамплітудності, якщо функція Лагранжа має вигляд:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{U_0}{\operatorname{ch}\left(\frac{x}{l}\right)}.$$

Розв'язок. У даному завданні графік потенціальної енергії має такий вигляд (рис. 1.3).

Зазначимо, що це є незвичайний потенціал. У квантовій механіці ви зустрінетеся із близькими (т. зв. баргмановськими) безвідбивними потенціалами.

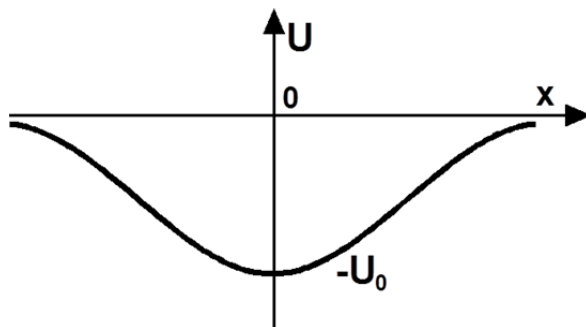


Рис. 1.3

Розкладаємо функцію $\operatorname{sech}(x/l) = 1/\operatorname{ch}(x/l)$ в ряд за ступенями малих зміщень (x/l) :

$$U \approx U_0 - \frac{1}{2}U_0\left(\frac{x}{l}\right)^2 = U_0 - \frac{kx^2}{2},$$

де $k = U_0/l^2$. Таким чином, частота малих коливань дорівнює

$$\omega = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{U_0}{m}}.$$

На графіку (рис. 1.3) не видно якихось характерних значень амплітуд коливань, але очевидно, що це величина l , оскільки розкладання потен-

ціальної енергії відбувається по ступенях x/l . Отже, необхідною є умова $x/l \ll 1$. Цій умові можна надати більш простий вигляд у термінах енергії коливання: $(E + U_0)/U_0 \ll 1$.

1.4. Розгляньте малі коливання точки з масою m , здатної рухатися по прямій і прикріпленої до пружини, інший кінець якої закріплений у точці A (рис. 1.4) на відстані l_0 від прямої. У положенні рівноваги ($x=0$) пружина не натягнута.

Розв'язок. Умови задачі наведено на рис. 1.4. Припускаючи виконання закону Гука для пружини, представимо її потенціальну енергію у вигляді

$$U = \frac{k(l - l_0)^2}{2}. \quad (1.22)$$

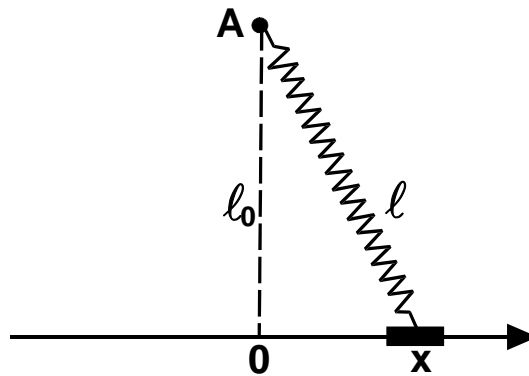


Рис. 1.4

Підставляючи вираз для довжини пружини $l = \sqrt{l_0^2 + x^2}$ в (1.22), отримуємо функцію Лагранжа:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k\left(\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0\right)^2}{2}.$$

Розкладаючи потенціальну енергію (1.22) в ряд Тейлора за величиною $x/l_0 \ll 1$ (умова малоамплітудності коливання), доходимо виразу

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^4}{8l_0^2}.$$

Таким чином, у даній системі лінійні коливання відсутні. Звернімо увагу на те, що, хоча було використано гармонічне наближення для енергії пружини, рівняння коливань

$$m\ddot{x} + \frac{kx^3}{4l_0^2} = 0$$

виявилось нелінійним. Це є т. зв. *геометричною нелінійністю*.

1.5. Розгляньте задачу 1.4 у випадку, коли в стані рівноваги ($x=0$) пружина розтягнута і має довжину $l_1 > l_0$.

Розв'язок. У даному випадку $l = \sqrt{l_1^2 + x^2}$ і функція Лагранжа має вигляд:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k\left(\sqrt{l_1^2 + x^2} - l_0\right)^2}{2}.$$

Розкладання потенціальної енергії в ряд Тейлора тепер дає

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k}{2} \left(\frac{l_1 - l_0}{l_1} \right) x^2.$$

Таким чином, частота малих коливань дорівнює

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{l_1 - l_0}{l_1}}$$

і йде до нуля у граничному випадку $l_1 \rightarrow l_0$ (попередньо не розтягнута пружина).

1.6. Знайти частоту малих коливань системи з лагранжианом

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2x} - \frac{x^2 + 1}{2x}.$$

Розв'язок. Графік потенціальної енергії

$$U(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}$$

наведений на рис. 1.5. Малі коливання відбуваються поблизу координати x_0 , яку знаходимо з умови

$$U'(x)|_{x=x_0} = \frac{x^2 - 1}{2x^2} = 0,$$

що дає $x_0 = 1$ і $U_0 = U(x_0) = 1$. Розкладання потенціальної енергії поблизу мінімуму має вигляд:

$$U(x) \approx U_0 + \frac{1}{2}U''|_{x=x_0} (x - x_0)^2 = U_0 + \frac{k}{2}(x - x_0)^2,$$

де $k = U''|_{x=1} = 1$.

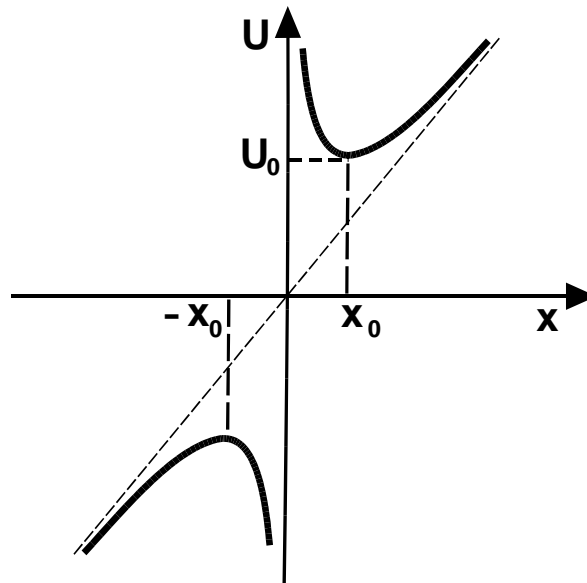


Рис. 1.5

У кінетичній енергії в основному наближенні координату x треба покласти рівній її значенню в точці мінімуму потенціальної енергії: $x = x_0 = 1$. При цьому ефективна маса дорівнює $m = 1$. Таким чином, частота малих коливань дорівнює

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1.$$

Звернімо увагу на наявність у цій системі ще одного екстремуму потенціальної енергії при $x_0 = -1$. У цій точці $U'' < 0$, тобто $k < 0$. Але не треба підходити до цієї обставини формально. Ефективна маса частинки в цій точці також є від'ємною ($m = -1$), і частинка здійснює коливальні рухи поблизу точки $x_0 = -1$, але з від'ємною енергією. Повний фазовий портрет системи, тобто фазові траєкторії при $E > 1$ й $E < -1$, наведено на рис. 1.6. Із закону збереження енергії маємо рівняння сімейства еліпсів $\dot{x}^2 + (x - E)^2 = E^2 - 1$. З фазового портрета видно, що можливими є два типи малих коливань відносно координати x_0 та координати $-x_0$.

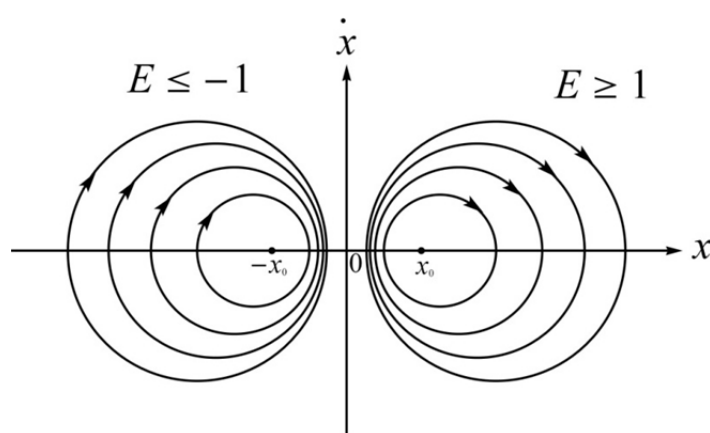


Рис. 1.6

1.7. Знайти частоту малих коливань математичного маятника з потенціальною енергією

$$U = U_0(1 - \cos \phi),$$

де ϕ – кут відхилення маятника зі стану рівноваги, і $U_0 = mgl$, де l – довжина підвісу.

Розв'язок. Приклад математичного маятника є дуже важливим у фізиці, тому на ньому варто зупинитися докладніше. Геометрія задачі зображена на рис. 1.7.

Із самого рис. 1.7 видно, наскільки різноманітною є динаміка такої системи. При малих відхиленнях від положення рівноваги $\phi \ll 1$ ми маємо лінійні коливання, при $\phi = \pi/2$ маятник перебуває в нестійкому положенні, при більших енергіях маятник обертається навколо точки підвісу.

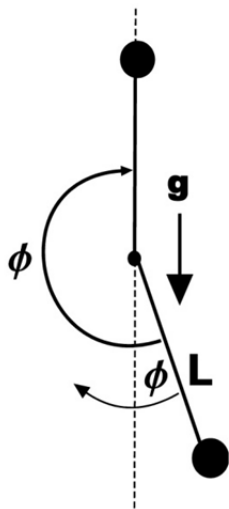


Рис. 1.7

Функція Лагранжа математичного маятника має вигляд:

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 - mgl(1 - \cos\phi),$$

де l – довжина підвісу. Поблизу стійкого положення рівноваги $\phi = 0$ маємо

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}mgl\phi^2.$$

Таким чином, частота лінійних коливань дорівнює

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Зазначимо, що маса частинки не ввійшла у відповідь, оскільки інерційна маса в кінетичній енергії збігається із гравітаційною масою в потенціальній енергії.

1.8. Знайти частоту малих коливань системи з лагранжианом

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} + \sin x.$$

Розв'язок. Ця задача є подібною до попередньої, але тепер потенціальна енергія $U(x) = -\sin x$ має мінімуми в точках $x = \pi/2 \pm 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (Приклад фізичної системи з дискретно виродженим

основним станом). Уводячи малі відхилення з положення рівноваги $x = \pi/2 + \varepsilon$, де $\varepsilon \ll 1$, отримаємо

$$L = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2.$$

Таким чином, частота малих коливань дорівнює одиниці $\omega = 1$.

1.9. Розглянути малі коливання частинки з функцією Лагранжа

$$L = \dot{x}^2 - x^2 e^x.$$

Розв'язок. До розв'язку цієї й наступних задач можна підходити формально:

1) розглянути потенціальну енергію (в даному випадку вона дорівнює $U(x) = x^2 e^x$);

2) обчислити першу похідну від потенціальної енергії ($U'(x) = 2xe^x + x^2 e^x$);

3) дорівняти її нулю для знаходження екстремумів $U'(x) = 0$, що дає два розв'язки $x_0 = 0$ й $x_1 = -2$;

4) обчислити другу похідну в екстремальних точках $U''(x) = (2 + 4x + x^2) e^x$.

У цьому випадку $U''(x_0) = 2 > 0$ і $U''(x_1) = -2 < 0$. Точці $x_0 = 0$ відповідає мінімум потенціальної енергії та малі лінійні коливання, а точці $x_1 = -2$ відповідає локальний максимум потенціальної енергії, тобто хитке положення рівноваги. Таким чином, у даному прикладі $k = 2$ і маса $m = 2$, а частота малих коливань дорівнює $\omega = \sqrt{k/m} = 1$. Але краще не підходити розв'язку завдань формально, а перш за все намалювати графік потенціальної енергії, щоб представити всю можливу динаміку системи. У цьому випадку графік потенціальної енергії наведено на рис. 1.8.

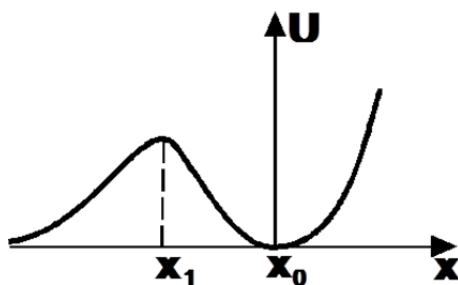


Рис. 1.8

1.10. Розглянути випадок наступного лагранжиана:

$$L = \frac{\dot{x}^2}{x} - \frac{x}{\ln x}.$$

Розв'язок. Потенціальна енергія дорівнює $U(x) = x/\ln x$. При цьому перша похідна дорівнює

$$U'(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2}.$$

З умови $U'(x) = 0$ знаходимо точку мінімуму потенціальної енергії $x_0 = e$.

У цій точці потенціальна енергія дорівнює $U(x_0) = e$. Друга похідна

$$U'' = -\frac{1}{x(\ln x)^2} + \frac{2}{x(\ln x)^3}$$

і в точці мінімуму $U''(x_0) = 1/e$. Тому функція Лагранжа поблизу мінімуму потенціальної енергії приблизно дорівнює

$$L \approx \left(\frac{2}{e}\right) \frac{\dot{x}^2}{2} - \left(\frac{1}{e}\right) \frac{(x - x_0)^2}{2}.$$

Таким чином, ефективна маса дорівнює $m = 2/e$ й ефективна пружна константа – $k = 1/e$. Частота малих коливань

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

1.3. ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 1

Задачі 1.11–1.46 пропонуються для самостійного розв'язку. До них наведені тільки відповіді.

У задачах 1.11–1.46 потрібно знайти частоти малих коливань системи, якщо її функція Лагранжа має такий вигляд.

1.11. $L = (\operatorname{ch} x)(\dot{x}^2 - 1)$. Відповідь: $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.12. $L = \frac{1}{2(x+2)^2} \dot{x}^2 - x + \ln(1+x)$. Відповідь: $\omega = 2$.

1.13. $L = \frac{x \ln^2 x}{2} \dot{x}^2 - x \ln x$. Відповідь: $\omega = e$.

1.14. $L = \frac{x \dot{x}^2}{2} - x \ln^2 x$. Відповідь: $\omega = \sqrt{2}$.

1.15. $L = \frac{x^2 \dot{x}^2}{2} - x \ln x$. Відповідь: $\omega = e^{3/2}$.

1.16. $L = \frac{(x+2) \dot{x}^2}{2} - x e^x$. Відповідь: $\omega = e^{-1/2}$.

1.17. $L = \frac{(x+3) \dot{x}^2}{2} - x^2 e^{-x}$. Відповідь: $\omega = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

1.18. $L = \frac{e^x \dot{x}^2}{2} - \frac{e^x}{2x}$. Відповідь: $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.19. $L = \frac{\ln x}{2} \dot{x}^2 + \frac{\ln x}{x}$. Відповідь: $\omega = e^{-3/2}$.

1.20. $L = \frac{(x-1)^2}{2} \dot{x}^2 - x^3 + 3x^2$. Відповідь: $\omega = \sqrt{6}$.

1.21. $L = \frac{x \dot{x}^2}{2} - \frac{x}{\ln x}$. Відповідь: $\omega = e^{-1}$.

1.22. $L = (x+1) \dot{x}^2 - 3x^2 + \frac{x^4}{4}$. Відповідь: $\omega = \sqrt{3}$.

1.23. $L = \frac{\dot{x}^2}{(x+1)} - \frac{x^4+3}{x}$. Відповідь: $\omega = 2\sqrt{3}$.

1.24. $L = \frac{\dot{x}^2}{x^2+3x+2} - x^2 - \frac{2}{x}$. Відповідь: $\omega = 3\sqrt{2}$.

1.25. $L = (x^2+1) \dot{x}^2 + \frac{1}{x^2+3}$. Відповідь: $\omega = \frac{1}{3}$.

1.26. $L = \frac{\dot{x}^2}{(x^2+2)^2} + \frac{1}{x^2-4}$. Відповідь: $\omega = \frac{1}{2}$.

- 1.27. $L = \frac{\dot{x}^2}{x+3} - \frac{x}{x^2+4}$. Відповідь: $\omega = 2^{-5/2}$.
- 1.28. $L = \frac{\dot{x}^2}{(x+1)^2} - \frac{3x^4+1}{x^3}$. Відповідь: $\omega = 2\sqrt{6}$.
- 1.29. $L = \frac{e^{-2x}\dot{x}^2}{2} + xe^{-x}$. Відповідь: $\omega = e^{1/2}$.
- 1.30. $L = e^x\dot{x}^2 + e^{8x-x^2-14}$. Відповідь: $\omega = e^{-1}$.
- 1.31. $L = \frac{\dot{x}^2}{(x+4)^2} + (x^2+2)e^{-x^2}$. Відповідь: $\omega = 4$.
- 1.32. $L = \frac{\dot{x}^2}{(\ln x)^2} + \frac{\ln x}{x}$. Відповідь: $\omega = \frac{1}{\sqrt{2e^3}}$.
- 1.33. $L = \frac{\dot{x}^2}{(x+2)^2+1} - x \operatorname{arctg} x$. Відповідь: $\omega = \sqrt{5}$.
- 1.34. $L = \frac{e^{-2x}\dot{x}^2}{x} - e^{-2x} + e^{-x}$. Відповідь: $\omega = (\ln 2)^{1/2}$.
- 1.35. $L = \ln x \cdot \dot{x}^2 - \frac{x^2}{\ln x}$. Відповідь: $\omega = 2\sqrt{2}$.
- 1.36. $L = \frac{2\dot{x}^2}{e^{x^2+5}} - (e^x + e^{-x} - 2 \cos x)$. Відповідь: $\omega = e^{5/2}$.
- 1.37. $L = (x^2-3)\dot{x}^2 + x^2e^{-x}$. Відповідь: $\omega = e^{-1}$.
- 1.38. $L = (x-1)^2\dot{x}^2 - \frac{x^2}{a^2+x^2}$. Відповідь: $\omega = \frac{1}{a}$.
- 1.39. $L = e^{-2x}\dot{x}^2 - e^{2x^2+4x+5}$. Відповідь: $\omega = \sqrt{2e}$.
- 1.40. $L = \frac{\dot{x}^2}{4\sqrt{x+12}} - x\sqrt{x+12}$. Відповідь: $\omega = \sqrt{3}$.
- 1.41. $L = \frac{e^x\dot{x}^2}{2} - \operatorname{tg}^2 x$. Відповідь: $\omega = \sqrt{2}$.
- 1.42. $L = (x^2+1)^2\dot{x}^2 + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. Відповідь: $\omega = 1$.

1.43. $L = (e^x + 1)\dot{x}^2 - (e^{-x} - 1)^2$. Відповідь: $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.44. $L = \operatorname{ch} x \dot{x}^2 - \operatorname{th}^2 x$. Відповідь: $\omega = 1$.

1.45. $L = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \dot{x}^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$. Відповідь: $\omega = 1$.

1.46. $L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{x^2 + 1}{2x}$. Відповідь: $\omega = 1$.

1.4. ЗАДАЧІ ДЛЯ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ ДО РОЗДІЛУ 1

Вище в доповненнях до розділу 1 були представлені зразки задач із докладним розбором розв'язків, а також задачі, для яких наведені тільки відповіді. Нижче – кілька задач, розв'язати які пропонуємо читачам.

1.46. Частинка з масою $m = 2$ знаходиться в полі $U = 3 \cos 2x + \alpha x$. Знайти область припустимих значень параметра α , при яких можливі коливання частинки, і залежність частоти цих коливань від параметра α .

1.47. Частинка з масою $m = 2$ знаходиться в полі $U = 3 \cos 2x + \beta x^2$. Вважаючи параметр β малим, оцінити кількість різних можливих коливань системи. Знайти частоту коливання, середня координата якого близька до значення $\bar{x} \approx \pi$, і її залежність від параметра β .

1.48. Частинка з масою $m = 2$ знаходиться в полі $U = 3 \cos 2x + \beta x^2$. Знайти критичне значення параметра β , при якому стають можливими коливання частинки поблизу точки $x = 0$. Знайти залежність частоти цих коливань від параметра β .

1.49. Частинка з масою $m = 2$ знаходиться в полі $U = x^2 + 2x + 2/(x+1)$. Знайти положення рівноваги частинки, а також період малих коливань поблизу нього. Знайти малі поправки до цих величин, спричинені малим додаванням $\delta U = \alpha x^2$ до потенціальної енергії.

1.50. Частинка з масою $m = 2$ знаходиться в полі $U = x^2 + 2x + 2/(x+1)$. Знайти положення рівноваги частинки, а також періоди малих коливань поблизу них.

1.51. Частинка з масою $m = 2$ знаходиться в полі $U = x + 8/(x+2)^4$. Знайти положення рівноваги частинки, а також період малих коливань

поблизу нього. Знайти малі поправки до цих величин, спричинені малим додаванням $\delta U = \alpha x^2$ до потенціальної енергії.

1.52. Бусинка з масою m може рухатися без тертя уздовж дроту, вигнутого в горизонтальній площині, геометрія якого в полярних координатах (r, ϕ) описується функцією $r = r(\phi)$. Бусинка прикріплена до пружини із жорсткістю k , інший кінець якої закріплений на початку координат (рис. 1.9). Довжина пружини в нерозтягнутому стані дорівнює l_0 . Знайти функцію Лагранжа такої системи, написати рівняння, що задає можливі положення рівноваги бусинки ϕ_n і виразити частоти малих коливань бусинки поблизу цих положень рівноваги через параметри функції $r = r(\phi)$.

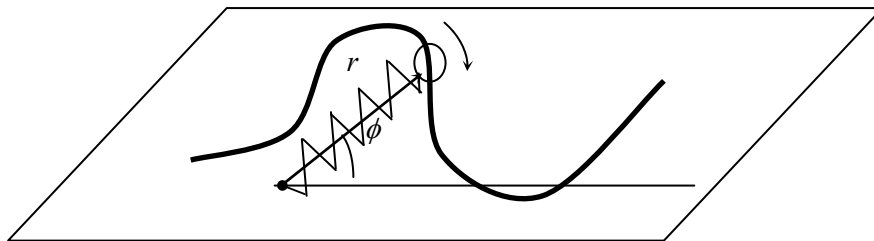


Рис. 1.9

1.53. Знайти умову, за якої в попередній задачі стають можливими малоамплітудні коливання бусинки поблизу точки ϕ , з ненульовою частотою.

1.54. Бусинка, що має заряд q і масу m , може скочити без тертя уздовж прямолінійної спиці. На відстані a від спиці перебуває заряд $-3q$. Знайти період малих коливань бусинки.

1.55. Бусинка із зарядом q і масою m може без тертя скочити по дротовому кільцю радіуса R . В одній із точок кільця перебуває заряд $2q$ з фіксованою координатою. Знайти період малих коливань бусинки.

1.56. Бусинка із зарядом q і масою m може без тертя скочити по плоскому дротовому кільцю радіуса R . У цій же площині на відстані $a < R$ від центру кільця перебуває фіксований заряд q . Знайти частоту малих коливань бусинки.

1.57. Розв'язати ту ж задачу, але у випадку, коли фіксований заряд усередині кільця має протилежний знак $-q$.

1.58. Розв'язати ту ж задачу у випадку, коли бусинка вільно переміщується уздовж дроту у вигляді еліпса, а додатковий заряд перебуває в одному з фокусів еліпса.

1.59. Знайти частоти всіх можливих малих коливань бусинки уздовж дроту в горизонтальній площині, форма якого в полярних координатах описується формулою $r(\phi) = 1 - \phi^2/2 + \phi^4/4$. Вважати, що жорсткість пружинки, що зв'язує бусинку із центром координат, дорівнює k і в нерозтягнутому стані довжина пружинки дорівнює $l_0 = 1$.

1.60. Функція Лагранжа системи з одним ступенем свободи має вигляд: $L = (x-1)^n \dot{x}^2 - x^2/(x^2 + 4)$, де параметр n є цілим числом. Знайти умови існування малих коливань та їх частоту.

1.61. Частинка з масою $m = 1$ знаходиться в полі $U = x + 1/\left[2(x+1)^2\right]$. Накреслити графік потенціальної енергії, знайти положення рівноваги частинки та період малих коливань поблизу його. Врахувати в потенціальній енергії додавання $\delta U = \alpha x^2/2$ за умови $\alpha \ll 1$. Обчислити поправки до знайдених величин і проаналізувати зміну систематики можливих коливань частинки, попередньо побудувавши графік потенціальної енергії з урахуванням зазначеної поправки.

ЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ СИСТЕМ З КІЛЬКОМА СТУПЕНЯМИ СВОБОДИ

2.1. ЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ В СИСТЕМІ ІЗ ДВОМА СТУПЕНЯМИ СВОБОДИ

2.1.1. Два лінійні взаємодіючі осцилятори

Перейдемо до розгляду динаміки двох зв'язаних лінійних осциляторів. Для простоти будемо вважати осцилятори ідентичними. Постановка задачі зображена на рис. 2.1.

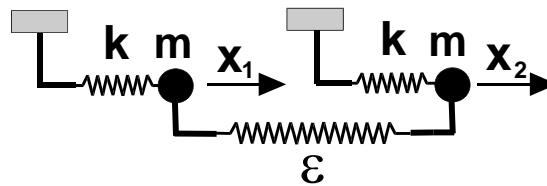


Рис. 2.1

Дві частинки з однаковою масою m , закріплені пружинами з константами пружності k , з'єднані між собою пружиною із пружною константою ε і коливаються в горизонтальному напрямку уздовж осі x . Тут x_1 і x_2 – зміщення частинок з положення рівноваги. Функція Лагранжа в цьому випадку має вигляд:

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{k}{2} x_1^2 - \frac{k}{2} x_2^2 - \frac{\varepsilon}{2} (x_1 - x_2)^2. \quad (2.1)$$

У випадку двох ступенів свободи фазовий простір чотиривимірний і не допускає наочної інтерпретації динаміки системи. Але можна розглянути потенціальну енергію як функцію двох координат частинок (так звану поверхню потенціальної енергії – ППЕ):

$$U = \frac{k}{2} x_1^2 + \frac{k}{2} x_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} (x_1 - x_2)^2. \quad (2.2)$$

Для розглянутого випадку вона має виглядати, як на рис. 2.2. (Тут же зображені лінії рівня постійної потенціальної енергії).

Рух двох частинок в одному напрямку можна представити як двовимірний рух однієї частинки по ППЕ.

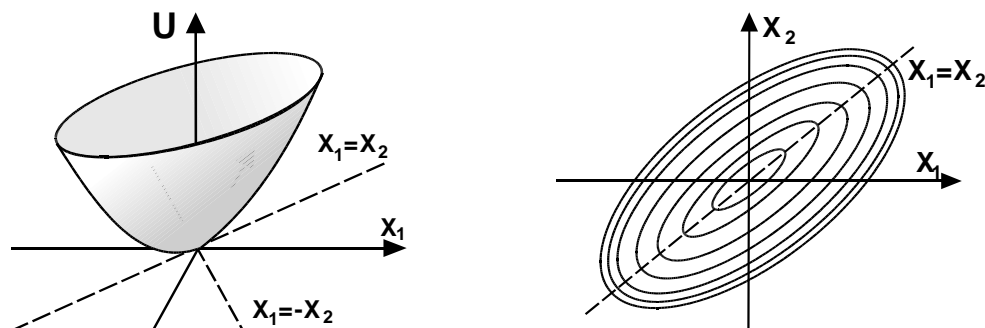


Рис. 2.2

З наведеного вище виразу для потенціальної енергії видно, що вона є додатною за будь-яких значень x_1 і x_2 , тобто є додатно визначеною квадратичною формою. Кінетична енергія також є додатно визначеною квадратичною формою.

Система динамічних рівнянь, які відповідають лагранжіану (2.1), має вигляд:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 + \varepsilon(x_1 - x_2) = 0; \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 + \varepsilon(x_2 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Шукаємо розв'язок, наприклад, у вигляді $x_i = a_i \sin \omega t$, $i = 1, 2$ і після підстановки в (2.3) отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (-\omega^2 m + k + \varepsilon)a_1 - \varepsilon a_2 = 0; \\ -\varepsilon a_1 + (-\omega^2 m + k + \varepsilon)a_2 = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

яку можна представити у вигляді

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_0^2 - \varepsilon/m & \varepsilon/m \\ \varepsilon/m & \omega^2 - \omega_1^2 - \varepsilon/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.5)$$

де $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – власна частота кожного з осциляторів за відсутності їх взаємодії ($\varepsilon = 0$). Нетривіальні розв'язки ($a_i \neq 0$) існують, якщо визначник у (2.5) дорівнює нулю, що дає

$$(\omega^2 - \omega_0^2) \left(\omega^2 - \omega_0^2 - \frac{2\varepsilon}{m} \right) = 0. \quad (2.6)$$

Це рівняння має два розв'язки, кожному з яких відповідає цілком визначене співвідношення між амплітудами коливання кожного з осциляторів:

$$(1) \quad \omega_1 = \omega_0; \quad a_1 = a_2 = a; \quad (2.7)$$

$$(2) \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2\varepsilon}{m}}; \quad a_1 = -a_2 = b. \quad (2.8)$$

Ці два розв'язки називаються нормальними коливаннями, або нормальними модами системи. Сукупність припустимих частот називається частотним спектром. У розглянутому прикладі спектр складається тільки з двох частот. У кожній моді обидві частинки коливаються з однією частотою, амплітуда моди є довільною, але співвідношення амплітуд окремих осциляторів є цілком визначеним. У першому розв'язку (синфазному) осцилятори коливаються у фазі $a_1 = a_2$, але з довільною амплітудою a . У другому розв'язку (протифазному) частинки коливаються у протифазі $a_1 = -a_2$ з довільною амплітудою b .

Переходу до нормальних мод відповідає перехід до нових координат,

$$\begin{cases} u = x_1 + x_2; \\ v = x_1 - x_2, \end{cases} \quad (2.9)$$

у термінах яких вихідні рівняння (2.3) переписуться у вигляді

$$\begin{cases} m\ddot{u} + ku = 0; \\ m\ddot{v} + (k + 2\varepsilon)v = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Рівняння (2.10) описують два незалежні ефективні осцилятори з різними частотами. Перехід до таких координат відповідає повороту площини (x_1, x_2) на кут $\pi/2$.

Загальний розв'язок являє собою лінійну комбінацію двох нормальних мод:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \quad (2.11)$$

У цій формулі враховано, що фази коливань у нормальних модах, загалом кажучи, є різними. Тут $\alpha_i, i=1, 2$ – початкові фази.

Лагранжиану (2.1) відповідає повна енергія

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{k}{2} x_1^2 + \frac{k}{2} x_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} (x_1 - x_2)^2, \quad (2.12)$$

яка є інтегралом руху. Але розглянута лінійна система із двома ступенями свободи має насправді два незалежні інтеграли руху, у якості яких можна вибрати енергії двох нормальних мод:

$$E^{(1)} = \frac{m}{2} \dot{u}^2 + \frac{m\omega_1^2}{2} u^2, \quad E^{(2)} = \frac{m}{2} \dot{v}^2 + \frac{m\omega_2^2}{2} v^2. \quad (2.13)$$

Ці дві величини зберігаються з часом, тоді як енергії окремих осциляторів не зберігаються.

Розглянемо випадок слабо взаємодіючих осциляторів з $\varepsilon \ll k$ і введемо «наближену енергію» кожного осцилятора:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{m}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} x_1^2; \\ E_2 = \frac{m}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} x_2^2. \end{cases} \quad (2.14)$$

Підставимо загальний розв'язок (2.11) у вираз для цих енергій у простому випадку $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ та врахуємо, що при $\varepsilon \ll k$ маємо $\omega_2 \approx \omega_0 + \varepsilon/m\omega_0$. Тоді в основному по ε наближенні

$$E_{1,2} \approx \frac{m\omega_0^2}{2} (a^2 + b^2) \pm m\omega_0^2 ab \cos\left(\frac{\varepsilon t}{m\omega_0}\right) + O(\varepsilon). \quad (2.15)$$

Таким чином, у системі відбувається повільне (із частотою $\Omega \approx \omega_0 \frac{\varepsilon}{k} \ll \omega_0$) перекачування енергії між осциляторами (див. рис. 2.3).

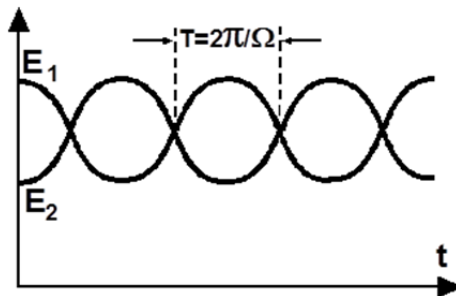


Рис. 2.3

Повне перекачування можливе тільки у випадку рівних амплітуд $a = b$. Фізична причина цього полягає в наступному. Представимо систему рівнянь (2.3) у вигляді

$$m\ddot{x}_i + (k + \varepsilon)x_i = \varepsilon x_j, \quad i = 1, 2; \quad j = 2, 1. \quad (2.16)$$

З (2.16) видно, що кожен з осциляторів діє на інший осцилятор, як сила, що змушує, на частоті, близькій до власної частоти. Це явище називається явищем внутрішнього резонансу.

Важливою властивістю коливання двох ідентичних осциляторів є те, що при усередненні по періоду $T = 2\pi / \Omega$ енергії двох осциляторів у середньому є рівними, тобто відбувається рівнорозподіл енергії між частинками.

2.1.2. Довільна лінійна система із двома ступенями свободи

Розглянемо узагальнення вивченої вище задачі на випадок довільної лінійної консервативної системи із двома ступенями свободи, яким відповідають узагальнені координати q_1 і q_2 . Цікавлячись коливальними рухами, припустимо, що потенціальна енергія має мінімум у точці $q_1 = q_{10}, q_2 = q_{20}$. Розкладаючи потенціальну енергію в ряд Тейлора за малими відхиленнями $x_i = q_i - q_{i0}$ з точністю до членів другого порядку, знаходимо наближений вираз для неї:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^2 \frac{k_{ik} x_i x_k}{2}; \quad k_{ik} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k} \right)_{q_0}. \quad (2.17)$$

Щоб рівновага була стійкою, має бути виконана нерівність

$$U(x) - U(0) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^2 \frac{k_{ik} x_i x_k}{2} > 0, \quad (2.18)$$

тобто квадратична форма $E = T + U$ для повної енергії повинна бути додатно визначеною. Умови стійкості рівноваги легко одержати, переписавши вираз для потенційної енергії у вигляді

$$\frac{1}{2} (k_{11} x_1^2 + 2k_{12} x_1 x_2 + k_{22} x_2^2) = \frac{k_{11}}{2} \left(x_1 + \frac{k_{12}}{k_{11}} x_2 \right)^2 + \frac{1}{2k_{11}} (k_{11} k_{22} - k_{12}^2) x_2^2 > 0.$$

Цей вираз залишається додатним при всіх значеннях $x_{1,2} \neq 0$, якщо коефіцієнти при обох квадратичних відносно x_1, x_2 виразах більше за нуль:

$$k_{11} > 0, \quad k_{11}k_{22} - k_{12}^2 = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} > 0. \quad (2.19)$$

Друга умова у (2.19) відповідає додатності риманової кривизни двовимірної поверхні, тобто двовимірному мінімуму або максимуму ППЕ. Перша умова у (2.19) виділяє мінімум серед екстремумів.

Кінетична енергія в загальному випадку системи із двома ступенями свободи має вигляд:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^2 a_{ik}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k. \quad (2.20)$$

Покладаємо у коефіцієнтах $a_{ik}(q)$ координати $q_i = q_{i0}$ і вводимо позначення $a_{ik}(q_0) = m_{ik}$. Маємо кінетичну енергію у вигляді додатно визначеної квадратичної форми від узагальнених швидкостей:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^2 m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k. \quad (2.21)$$

Коефіцієнти m_{ik} , як і k_{ik} , також завжди можна вважати симетричними щодо перестановки індексів $m_{ik} = m_{ki}$, оскільки кінетична та потенціальна енергії є скалярами, а тензори $\dot{x}_i \dot{x}_k$ та $x_i x_k$ є симетричними. Тут додатність квадратичної форми автоматично забезпечена початковим виразом для кінетичної енергії, записаним у декартових координатах.

Таким чином, функція Лагранжа системи приймає вигляд:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^2 m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^2 k_{ik} x_i x_k. \quad (2.22)$$

Звідси випливають рівняння руху (рівняння Ейлера – Лагранжа):

$$\begin{cases} m_{11} \ddot{x}_1 + m_{12} \ddot{x}_2 + k_{11} x_1 + k_{12} x_2 = 0; \\ m_{21} \ddot{x}_1 + m_{22} \ddot{x}_2 + k_{21} x_1 + k_{22} x_2 = 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Часткові розв'язки системи (2.23) слід шукати у вигляді

$$x_j = A_j e^{i\omega t}; \quad j = 1, 2. \quad (2.24)$$

Тут A_j – постійні, але поки не визначені коефіцієнти. У розв’язків (2.24), звичайно, потрібно брати дійсну частину. Підставляючи (2.24) у (2.23) і скорочуючи на $e^{i\omega t}$, отримаємо алгебраїчні рівняння, що зв’язують між собою коефіцієнти A_j :

$$\begin{cases} (k_{11} - \omega^2 m_{11}) A_1 + (k_{12} - \omega^2 m_{12}) A_2 = 0; \\ (k_{12} - \omega^2 m_{12}) A_1 + (k_{22} - \omega^2 m_{22}) A_2 = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Як відомо, система лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь із постійними коефіцієнтами має нетривіальні (відмінні від нуля) розв’язки, якщо дорівнює нулю визначник, побудований з коефіцієнтів цих рівнянь:

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \omega^2 m_{11} & k_{12} - \omega^2 m_{12} \\ k_{12} - \omega^2 m_{12} & k_{22} - \omega^2 m_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.26)$$

Рівняння (2.26) називається характеристичним і служить для визначення власних частот ω . Це рівняння другого ступеня відносно ω^2 :

$$(m_{11} m_{22} - m_{12}^2) \omega^4 - (k_{11} m_{22} + k_{22} m_{11} - 2k_{12} m_{12}) \omega^2 + (k_{11} k_{22} - k_{12}^2) = 0. \quad (2.27)$$

Покажемо, що рівняння (2.27) має тільки додатні корені ω^2 , які відповідають дійсним значенням частот (тобто коливанням). Розглянемо функцію

$$f(\omega^2) = (k_{11} - \omega^2 m_{11})(k_{22} - \omega^2 m_{22}) - (k_{12} - \omega^2 m_{12})^2. \quad (2.28)$$

Вона являє собою квадратичну параболу відносно ω^2 . При цьому $f(0) = k_{11} k_{22} - k_{12}^2 > 0$ і $f(\omega^2 \rightarrow +\infty) \rightarrow +\infty$. Оскільки при $\omega^2 = k_{11}/m_{11} > 0$ і $\omega^2 = k_{22}/m_{22} > 0$, то величина f у (2.28) є від’ємною, а обидва корені характеристичного рівняння ω_1^2 й ω_2^2 є додатними. Сама величина ω має чотири значення, попарно рівні за абсолютною величиною. Якщо брати розв’язок у вигляді (2.24), то є достатнім використання лише додатних значень ω .

Як і в розділі 2.1.1, кожному значенню ω_i^2 відповідає нормальна мода коливань. Амплітуда кожної моди є довільною, але співвідношення амплітуд коливань узагальнених координат у ній є повністю визначеним.

У випадку двох змінних йдеться про відношення

$$\zeta_i = A_2^{(i)} / A_1^{(i)}; \quad i = 1, 2, \quad (2.29)$$

де індекс i нумерує моди. Це відношення дорівнює відношенню алгебраїчних доповнень елементів першого рядка визначника (2.26), тобто

$$\frac{A_2^{(i)}}{A_1^{(i)}} = -\frac{k_{12} - \omega_i^2 m_{12}}{k_{22} - \omega_i^2 m_{22}}; \quad i = 1, 2. \quad (2.30)$$

Це твердження відразу випливає з другого рівняння у формулах (2.25) для амплітуд.

Кожна з двох частот ω_1^2, ω_2^2 визначає один частковий розв'язок системи (одне нормальне коливання). Загальний розв'язок системи двох лінійних однорідних диференціальних рівнянь є сумою двох часткових розв'язків

$$x_i = A_i^{(1)} e^{i\omega_1 t} + A_i^{(2)} e^{i\omega_2 t}. \quad (2.31)$$

Якщо ввести позначення

$$\theta_1 = A_1^{(1)} e^{i\omega_1 t}; \quad \theta_2 = A_1^{(2)} e^{i\omega_2 t}, \quad (2.32)$$

то формули (2.31) приймуть вигляд співвідношень

$$\begin{cases} x_1 = \theta_1 + \theta_2; \\ x_2 = \zeta_1 \theta_1 + \zeta_2 \theta_2 \end{cases} \quad (2.33)$$

або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta_1 \end{pmatrix} \theta_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \theta_2, \quad (2.34)$$

які визначають формули переходу від початкових узагальнених координат (x_1, x_2) до нових координат (θ_1, θ_2) , які задовольняють рівняння

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_1^2 \theta_1 = 0; \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_2^2 \theta_2 = 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

Кожне із цих рівнянь може бути отримане з функції Лагранжа

$$L_{1,2} = \frac{m_{1,2}}{2} (\dot{\theta}_{1,2}^2 - \omega_{1,2}^2 \theta_{1,2}^2), \quad (2.36)$$

яка описує гармонічне коливання системи з одним ступенем свободи.

Тут $m_{1,2}$ – додатні сталі.

Таким чином, у змінних (θ_1, θ_2) задача про зв'язані коливання з двома ступенями свободи звелася до задачі про незалежні коливання двох лінійних гармонічних незалежних осциляторів. Кожен такий гармонічний осцилятор описується відповідною координатою θ_i , яка й представляє собою нормальну координату. Тому кожна початкова узагальнена координата представляється як сума незалежних один від одного гармонічних коливань нормальних координат, що змінюються за законом (2.32). Зазвичай частоти коливань є непорівнянними. Тоді сума виражень, в які входять непорівнянні частоти, – це двічі періодича функція часу.

Нормальні координати можна виразити через початкові узагальнені координати:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\zeta_2 x_1 - x_2}{\zeta_2 - \zeta_1}; \\ \theta_2 &= \frac{\zeta_1 x_1 - x_2}{\zeta_1 - \zeta_2}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ці формули узагальнюють формули (2.9) з розділу 2.1.1 на загальний випадок системи з двома ступенями свободи. З них, зокрема, видно, що при певному виборі початкових умов можна збудити лише одну моду.

Якщо, наприклад, вибрати в момент $t = 0$ координати й швидкості в такому відношенні, що $\zeta_2 x_1 - x_2 = 0$ й $\zeta_2 \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = 0$, то коливання з частотою ω_1 не буде відбуватися зовсім (збудиться тільки друга нормальна мода).

Зазвичай нормальні координати вибирають таким чином, щоб коефіцієнти при квадратах швидкостей у функції Лагранжа дорівнювали $1/2$. Для цього досить визначити нормальні координати рівностями

$$\Theta_{1,2} = \sqrt{m_{1,2}} \theta_{1,2}. \quad (2.38)$$

Тоді функція Лагранжа набуває вигляду:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (\dot{\Theta}_i^2 - \omega_i^2 \Theta_i^2), \quad (2.39)$$

а відповідна повна енергія має таку форму:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (\dot{\Theta}_i^2 + \omega_i^2 \Theta_i^2). \quad (2.40)$$

Завдяки нормальним координатам розгляд задач про коливання значно спрощується, тому що лінійний гармонічний осцилятор є в багатьох відносинах однією з найпростіших механічних систем.

2.2. ДОПОВНЕННЯ ДО РОЗДІЛУ 2

2.1. Точки підвісу двох однакових математичних маятників (A, B) довжини l та маси m перебувають на відстані a один від одного і розташовані на одній горизонталі. Самі маси з'єднані між собою пружиною з жорсткістю k та довжиною a в ненапруженому стані (див. рис. 2.4). Дослідити плоскі малі коливання зв'язаних маятників.

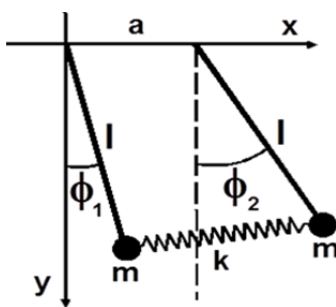


Рис. 2.4

Розв'язок. При плоскому русі дана система має два ступені свободи, тому що наявність пружинки означає не накладання зв'язку на систему, а введення взаємодії між матеріальними точками. Виберемо систему координат, як показано на рис. 2.4, а як незалежні координати оберемо ϕ_1 й ϕ_2 – кути відхилення кожного маятника від положення стійкої рівноваги: $\phi_1^{(0)} = \phi_2^{(0)} = 0$. Кінетична енергія системи дорівнює

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2). \quad (2.41)$$

Потенціальна енергія складається з енергії пружної деформації пружини $k(\Delta l)^2/2$ і потенціальної енергії обох маятників у полі тяжіння. Для малих коливань (лінійних по ϕ_1 й ϕ_2) у виразі для потенціальної енергії слід обмежитися членами другого порядку малості по ϕ_1, ϕ_2 . При цьому подовження пружини

$$\Delta l = AB - a = (y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2 - a \quad (2.42)$$

слід, вочевидь, знайти з точністю до лінійних членів. Оцінимо окремі доданки:

$$y_B - y_A = l(\cos \phi_2 - \cos \phi_1) \approx \frac{l}{2}(\phi_1^2 - \phi_2^2) \approx 0; \quad \sim O(\phi^2) \ll \phi;$$

$$x_B - x_A = l(\sin \phi_2 - \sin \phi_1) \approx \frac{l}{2}(\phi_2 - \phi_1) + a.$$

Тоді $\Delta l \approx l(\phi_2 - \phi_1)$, а пружна енергія –

$$U_{elastic} = \frac{1}{2} kl^2 (\phi_2 - \phi_1)^2, \quad (2.43)$$

тобто в цьому випадку можна знехтувати вертикальною складовою подовження пружини.

З тією ж точністю для потенціальної енергії обох маятників у полі тяжіння отримаємо вираз:

$$U_{gravity} = -mgl(\cos \phi_1 + \cos \phi_2) \approx -2mgl + \frac{mgl}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2). \quad (2.44)$$

Функція Лагранжа, побудована по (2.41), (2.42), (2.43), має вигляд:

$$L = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2) - \frac{1}{2} \left[(mgl + kl^2)(\phi_1^2 + \phi_2^2) - 2kl^2 \phi_1 \phi_2 \right]. \quad (2.45)$$

Випишемо з лагранжиана (2.45) коефіцієнти m_{ik} й k_{ik} :

$$\begin{aligned} m_{11} = m_{22} = ml^2; \quad m_{12} = m_{21} = 0; \\ k_{11} = k_{22} = mgl + kl^2; \quad k_{12} = k_{21} = -kl^2. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Лінійні рівняння руху з урахуванням (2.46) приймають вигляд:

$$\begin{cases} \ddot{\phi}_1 + (\omega_0^2 + \Omega^2)\phi_1 - \Omega^2\phi_2 = 0; \\ \ddot{\phi}_2 + (\omega_0^2 + \Omega^2)\phi_2 - \Omega^2\phi_1 = 0, \end{cases} \quad (2.47)$$

де частота $\omega_0^2 = g/l$ збігається із частотою окремого ізольованого маятника, а $\Omega^2 = k/m$. Розв'язок (2.47) шукаємо у вигляді

$$\phi_i = A_i e^{i\omega t}; \quad i = 1, 2. \quad (2.48)$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2 & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & \omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.49)$$

Вирішуючи характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2 & -\Omega^2 \\ -\Omega^2 & \omega_0^2 + \Omega^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.50)$$

знаходимо власні частоти:

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \omega_0^2 + 2\Omega^2 = \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}; \\ \omega_2^2 = \omega_0^2 = \frac{g}{l}. \end{cases} \quad (2.51)$$

Загальний розв'язок рівнянь руху в цьому випадку має вигляд:

$$\begin{cases} \phi_1(t) = \text{Re} \left[A_1^{(1)} e^{i\omega_1 t} + A_1^{(2)} e^{i\omega_2 t} \right] = a \cos(\omega_1 t + \alpha) + b \cos(\omega_2 t + \beta); \\ \phi_2(t) = \text{Re} \left[-A_1^{(1)} e^{i\omega_1 t} + A_1^{(2)} e^{i\omega_2 t} \right] = -a \cos(\omega_1 t + \alpha) - b \cos(\omega_2 t + \beta). \end{cases} \quad (2.52)$$

Тепер можна ввести нормальні координати:

$$\begin{cases} \theta_1 = \operatorname{Re}\left(A_1^{(1)} e^{i\omega_1 t} l\sqrt{2m}\right); \\ \theta_2 = \operatorname{Re}\left(A_1^{(2)} e^{i\omega_2 t} l\sqrt{2m}\right). \end{cases} \quad (2.53)$$

Тоді

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{1}{l\sqrt{2m}}(\theta_1 + \theta_2); \\ \phi_2 = \frac{1}{l\sqrt{2m}}(-\theta_1 + \theta_2), \end{cases} \quad (2.54)$$

а функція Лагранжа має вигляд (2.36).

Симетричне (синфазне) головне коливання (ω_1, θ_1) реалізується, якщо початкові відхилення обох маятників і їх початкові швидкості є рівними між собою (рис. 2.5а), тобто

$$\begin{cases} \phi_1(0) = \phi_2(0) = \phi_0; \\ \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = \dot{\phi}_0. \end{cases} \quad (2.55)$$

З формул (2.52) з урахуванням початкових умов (2.55) отримаємо

$$\phi_1(t) = \phi_2(t) = \left(\phi_0^2 + \frac{\dot{\phi}_0^2}{\omega_2^2}\right)^{1/2} \cos\left[\omega_1 t - \arctg\left(\frac{\dot{\phi}_0}{\omega_2 \phi_0}\right)\right]. \quad (2.56)$$

Антисиметричне (антифазне) головне коливання (ω_2, θ_2) здійснюється, коли початкові відхилення обох маятників і їх початкові швидкості є рівними між собою за абсолютною величиною, але протилежними за знаком (рис. 2.5б):

$$\begin{cases} \phi_1(0) = -\phi_2(0) = \phi_0; \\ \dot{\phi}_1(0) = -\dot{\phi}_2(0) = \dot{\phi}_0. \end{cases} \quad (2.57)$$

При початкових умовах (2.52) знаходимо

$$-\phi_1(t) = \phi_2(t) = -\left(\phi_0^2 + \frac{\dot{\phi}_0^2}{\omega_1^2}\right)^{1/2} \cos\left[\omega_2 t - \arctg\left(\frac{\dot{\phi}_0}{\omega_1 \phi_0}\right)\right]. \quad (2.58)$$

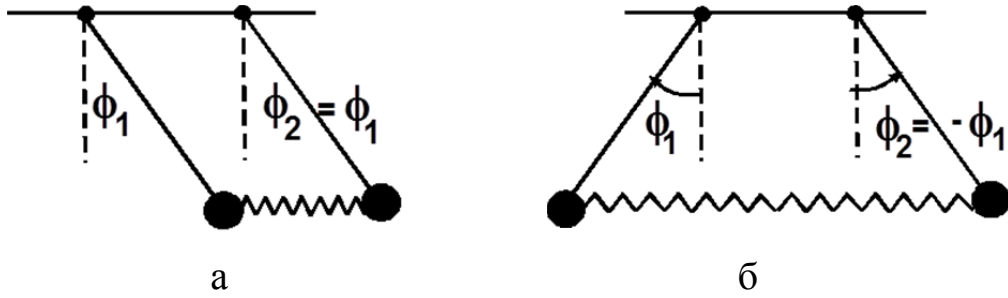


Рис. 2.5

Задамо тепер такі початкові умови:

$$\begin{cases} \phi_1(0) = \phi_0; \phi_2(0) = 0; \\ \dot{\phi}_1(0) = \dot{\phi}_2(0) = 0. \end{cases} \quad (2.59)$$

Перший маятник відхилений на кут ϕ_0 , другий маятник перебуває в стані рівноваги, а початкові швидкості обох маятників дорівнюють нулю. Загальний розв'язок (2.52) при початкових умовах (2.59) приймає вигляд:

$$\begin{cases} \phi_1(t) = \frac{\phi_0}{2}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t); \\ \phi_2(t) = \frac{\phi_0}{2}(-\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t). \end{cases} \quad (2.60)$$

Розглянемо випадок слабкого зв'язку між маятниками. Якщо $\omega_0 \gg \Omega$, то розв'язок (2.60) описує майже гармонічне коливання. Щоб показати це, запишемо (2.60) у вигляді

$$\begin{cases} \phi_1(t) = \phi_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right); \\ \phi_2(t) = \phi_0 \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right). \end{cases} \quad (2.61)$$

Підставимо в (2.61) наближені значення власних частот

$$\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \approx \omega_0; \quad \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \approx \frac{\Omega^2}{2\omega_0}. \quad (2.62)$$

Маємо

$$\begin{cases} \phi_1(t) = \phi_0 \cos\left(\frac{\Omega^2}{2\omega_0}t\right) \cdot \cos(\omega_0 t); \\ \phi_2(t) = \phi_0 \sin\left(\frac{\Omega^2}{2\omega_0}t\right) \cdot \sin(\omega_0 t). \end{cases} \quad (2.63)$$

Обговоримо отриманий результат. Оскільки $\Omega^2/(2\omega_0) \ll \omega_0$, перші співмножники в дужках у розв'язку (2.63) є функціями, що повільно змінюються з часом, і весь розв'язок являє собою гармонічне коливання із частотою ω_0 , але періодично змінною амплітудою, хоча і з більшим періодом. У початковий момент амплітуда першого маятника має максимальне значення, яке дорівнює ϕ_0 , а амплітуда другого маятника дорівнює нулю. Амплітуда першого маятника зменшується, а другого зростає, і в момент $t_1 = \pi\omega_0/\Omega^2 = T/4$ коливання першого маятника припиняються (амплітуда їх стає рівною нулю); амплітуда ж другого маятника в цей момент є максимальною й дорівнює ϕ_0 . Далі процес повторюється у зворотному порядку, тобто відбувається безперервний обмін енергією коливань між маятниками. Це явище називається *биттям*. Воно вже розглядалося на с. 31 (два слабо зв'язані осцилятори) і графічно зображене на рис. 2.6. Знайдемо середню за період $T = 2\pi/\omega_0$ повну енергію першого маятника.

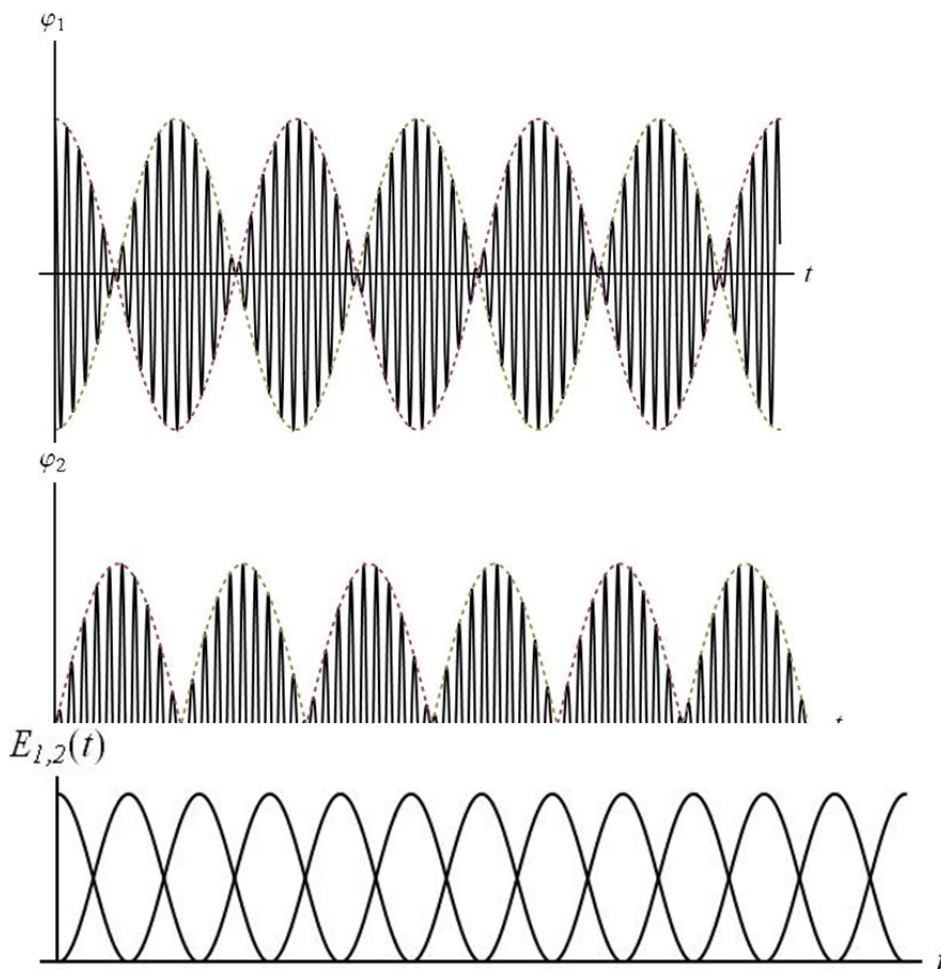


Рис. 2.6

Оскільки величина $\phi_0 \cos(\Omega^2 t / 2\omega_0)$ є практично постійною протягом одного циклу коливань із високою частотою ω_0 , то

$$\begin{aligned} E_1 &= \overline{\frac{ml^2 \dot{\phi}_1^2}{2} + (mgl + kl^2) \phi_1^2} \approx \frac{kl^2}{2} \overline{(\dot{\phi}_1^2 + \omega_0^2 \phi_1^2)} = \\ &= \frac{kl^2 \omega_0^2 \phi_0^2}{2} \cos^2\left(\frac{\Omega^2}{2\omega_0} t\right). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Аналогічно для другого маятника

$$E_2 = \frac{kl^2 \omega_0^2 \phi_0^2}{2} \sin^2\left(\frac{\Omega^2}{2\omega_0} t\right). \quad (2.65)$$

Отже, повна енергія системи двох слабо зв'язаних маятників –

$$E = E_1 + E_2 = \frac{kl^2 \omega_0^2 \phi_0^2}{2}. \quad (2.66)$$

Таким чином, маємо:

$$E_1 = \frac{E}{2} \left(1 + \cos \frac{\Omega^2}{\omega_0} t\right); \quad E_2 = \frac{E}{2} \left(1 - \cos \frac{\Omega^2}{\omega_0} t\right). \quad (2.67)$$

У розглянутому випадку рівності мас і довжин підвісу обмін енергією є повним; маятники налаштовані в резонанс. Якщо ж маятники не однакові, то обмін енергією буде неповним.

Відзначимо, що обмін енергією не буде мати місця тільки в тих випадках, коли реалізується лише одне з нормальних коливань (симетричне

або антисиметричне), оскільки нормальні моди є незалежними. Метод розв'язку даної задачі застосуємо до розв'язку ряду задач про коливання немеханічних систем; наприклад, задача про індуктивно зв'язані електричні контури розв'язується аналогічно даному прикладу.

2.2. Розглянути коливання двох (однакових) зв'язаних математичних маятників, якщо точки їх підвісу перебувають на відстані a , у рівновазі відстань між самими маятниками збігається з a , але пружина, яка їх з'єднує, закріплена на стрижнях підвісу на відстані $b < l$ від точок підвісу (рис. 2.7).

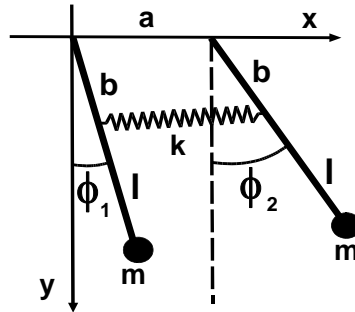


Рис. 2.7

Розв'язок. Для розв'язку цієї задачі можна скористатися наближеним квадратичним гамільтоніаном з попереднього прикладу, замінивши в пружному члені повну довжину підвісу l на відстань від точок підвісу до місця закріплення пружини b :

$$L = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2) - \frac{mgl}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{kb^2}{2} (\phi_2 - \phi_1)^2.$$

При цьому характеристичне рівняння зміниться в такий спосіб:

$$\left(\omega^2 - \frac{g}{l} \right) \left(\omega^2 - \frac{g}{l} - 2 \frac{k}{m} \left(\frac{b}{l} \right)^2 \right) = 0.$$

Таким чином, частота синфазних коливань залишається рівною ω_0 , а частота протифазних коливань зменшується і дорівнює $\Omega^2 (b/l)^2$.

2.3. Розглянути коливання двох зв'язаних лінійних осциляторів (рис. 2.8) з різними масами та різними пружними константами.

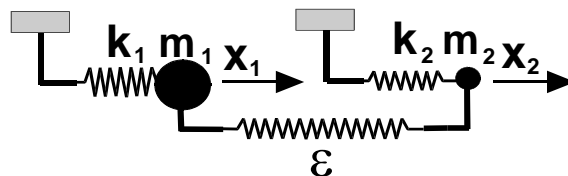


Рис. 2.8

Розв'язок. Розглянемо спочатку простий випадок, коли зв'язані лінійні осцилятори відрізняються тільки масами і $m_1 = M > m_2 = m$. У цьому випадку лагранжиан системи записується так:

$$L = \frac{M}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{k}{2} (x_1^2 + x_2^2) - \frac{\varepsilon}{2} (x_1 - x_2)^2.$$

Рівняння руху мають вигляд:

$$\begin{cases} M \ddot{x}_1 + kx_1 + \varepsilon(x_1 - x_2) = 0; \\ m \ddot{x}_2 + kx_2 + \varepsilon(x_2 - x_1) = 0. \end{cases}$$

Алгебраїчні рівняння для амплітуд коливань зводяться до системи

$$\begin{cases} (M\omega^2 - k - \varepsilon)a_1 + \varepsilon a_2 = 0; \\ (m\omega^2 - k - \varepsilon)a_2 + \varepsilon a_1 = 0. \end{cases}$$

Із цієї системи відразу випливає, що

$$(M - m)\omega^2 = \varepsilon(a_1^2 - a_2^2)/a_1 a_2.$$

Отже, у синфазному коливанні з $\text{sign}(x_1) = \text{sign}(x_2)$ маємо $x_1 > x_2$, тобто важкий осцилятор коливається з більшою амплітудою, ніж легкий. У протифазному коливанні з $\text{sign}(x_1) = -\text{sign}(x_2)$, навпаки, $x_1 < x_2$ і легка частинка коливається з більшою амплітудою, ніж важка.

Характеристичне рівняння для визначення частот нормальних мод

$$(M\omega^2 - k - \varepsilon)(m\omega^2 - k - \varepsilon) - \varepsilon^2 = 0$$

має два розв'язки:

$$\omega_{2,1}^2 = \frac{k + \varepsilon}{\mu} \pm \sqrt{\left(\frac{k + \varepsilon}{\mu}\right)^2 - \frac{k(k + 2\varepsilon)}{mM}},$$

де $\mu = 2mM/(m + M)$ – приведена маса.

У випадку великої відмінності мас $M \gg m$ частота антифазних коливань дорівнює $\omega_2^2 \approx \omega_0^2 + \varepsilon/m$, а частота синфазних коливань – $\omega_1^2 \approx \omega_0^2 (m/M)[(k + 2\varepsilon)/(k + \varepsilon)]$. Обидві частоти зменшуються порівняно з від-

повідними частотами у випадку однакових мас $\omega_2^2 \approx \omega_0^2 + 2\varepsilon/m$ і $\omega_1^2 \approx \omega_0^2 = k/m$, але зниження частоти синфазних коливань є суттєвішим (дивися нижче завдання про коливання важкої домішки в лінійному ланцюжку).

У випадку різних пружних констант лагранжиан системи перетвориться в такий спосіб:

$$L = \frac{M}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{K}{2} x_1^2 - \frac{k}{2} x_2^2 - \frac{\varepsilon}{2} (x_1 - x_2)^2,$$

а характеристичне рівняння має вигляд:

$$(M\omega^2 - K - \varepsilon)(m\omega^2 - k - \varepsilon) - \varepsilon^2 = 0.$$

Корені цього рівняння, що відповідають синфазним і протифазним коливанням, дорівнюють

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2Mm} \left\{ [(k + \varepsilon)M + (K + \varepsilon)m] \mp \sqrt{[(k + \varepsilon)M - (K + \varepsilon)m]^2 + 4Mm\varepsilon^2} \right\}.$$

Формула спрощується в межі рівних мас $m = M$:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{m} \left[K + k + 2\varepsilon \mp \sqrt{(K - k)^2 + 4\varepsilon^2} \right].$$

При великій відмінності пружних констант ($K \gg k$) у протифазних коливаннях із частотою $\omega_2^2 \approx K/M$. коливається фактично один перший осцилятор з амплітудою $a_1 \approx -a_2 (Km/\varepsilon M) \gg a_2$. У синфазній моді із частотою $\omega_1^2 \approx (k + \varepsilon)/m$. коливається в основному другий осцилятор з амплітудою $a_2 \approx a_1 (K/\varepsilon) \gg a_1$.

2.4. Розглянути малі вертикальні коливання двох різні лінійно зв'язаних частинок (див. рис. 2.9). Силою тяжіння знехтувати.

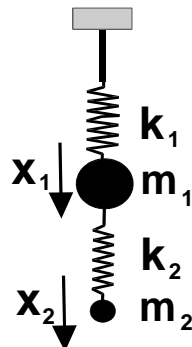


Рис. 2.9

Розв'язок. Функція Лагранжа системи та рівняння руху має вигляд:

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{k_1}{2} x_1^2 + \frac{k_2}{2} (x_1 + x_2)^2;$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0. \end{cases}$$

Легко знаходиться характеристичне рівняння

$$(m_1 \omega^2 - k_1 - k_2)(m_2 \omega^2 - k_2) - k_2^2 = 0$$

і частоти нормальних коливань

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{k_2}{m_2} \right) + \frac{k_1}{m_1} \frac{k_2}{m_2} = 0.$$

Наприклад, у випадку великої різниці мас ($m_2 \ll m_1$) частота синфазних коливань дорівнює $\omega_1^2 \approx k_1/m_1$ і амплітуди осциляторів є практично рівними, тобто відповідь звелася до динаміки одного першого осцилятора.

У протифазній моді $a_1 \approx -(m_2/m_1)a_2 \ll a_2$ та частота дорівнює $\omega_2^2 \approx k_2/m_2$: перша важка частинка є майже нерухливою, а легка коливається, як ізольований осцилятор.

2.5. Описати малі коливання подвійного плоского маятника (рис. 2.10).

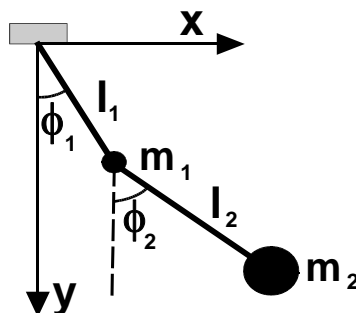


Рис. 2.10

Розв'язок. Функція Лагранжа подвійного плоского маятника (див. рис. 2.10) має вигляд:

$$L = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_1 g y_1 + m_2 g y_2. \quad (2.68)$$

Після підстановки $x_1 = l_1 \sin \phi_1$; $x_2 = l_1 \sin \phi_1 + l_2 \sin \phi_2$; $y_1 = l_1 \cos \phi_1$; $y_2 = l_1 \cos \phi_1 + l_2 \cos \phi_2$ лагранжиан (2.58) зводиться до виразу

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \phi_1 + m_2 l_2 \cos \phi_2. \quad (2.69)$$

Якщо обмежитися малими коливаннями, то треба вважати, що відхилення ϕ_1 й ϕ_2 є близькими до нуля, тобто маятник коливається з малим розмахом поблизу вертикалі. Тоді у виразі для кінетичної енергії в лагранжиані (2.59) слід підставити рівноважні значення кутів відхилення

$$\phi_1^{(0)} = \phi_2^{(0)} = 0; \quad \cos(\phi_1^{(0)} - \phi_2^{(0)}) = 1.$$

Формулу потенціальної енергії треба спростити, використовуючи розкладання $\cos \phi_1$ й $\cos \phi_2$ у ряд Тейлора поблизу $\phi_1^{(0)} = 0$, $\phi_2^{(0)} = 0$ до квадратичних членів включно, тобто замінити в лагранжиані (2.59) $\cos \phi_1$ та $\cos \phi_2$:

$$\cos \phi_1 \approx 1 - \frac{\phi_1^2}{2}; \quad \cos \phi_2 \approx 1 - \frac{\phi_2^2}{2}.$$

Відкидаючи постійні члени, запишемо функцію Лагранжа малих коливань подвійного математичного маятника у вигляді

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 - \frac{m_1 + m_2}{2} l_1 g \phi_1^2 - \frac{m_2}{2} l_2 g \phi_2^2. \quad (2.70)$$

Порівнюючи цей вираз із загальним виглядом лагранжиана системи з двома ступенями свободи (2.22), одержуємо значення коефіцієнтів m_{ik} і k_{ik} для випадку подвійного маятника:

$$m_{11} = (m_1 + m_2) l_1^2; \quad m_{22} = m_2 l_2^2; \quad m_{12} = m_2 l_1 l_2;$$

$$k_{11} = (m_1 + m_2) l_1 g; \quad k_{22} = m_2 l_2 g; \quad k_{12} = 0.$$

Характеристичне рівняння при цьому має вигляд:

$$\omega^4 m_1 l_1 l_2 - \omega^2 MLg + Mg^2 = 0, \quad (2.71)$$

де $M = m_1 + m_2$ й $L = l_1 + l_2$. Тому частоти нормальних мод дорівнюють

$$\omega_{1,2}^2 = g \frac{M}{m_1} \frac{1}{2l_1 l_2} \left(l_1 + l_2 \mp \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - 4 \frac{m_1}{M} l_1 l_2} \right). \quad (2.72)$$

Розглянемо деякі граничні випадки. Для двох ідентичних маятників з $l_1 = l_2 = l$ і $m_1 = m_2 = m$ із загальної формули для частот (2.72) маємо

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 (2 \pm \sqrt{2}), \quad (2.73)$$

де $\omega_0^2 = g/l$ відповідає частоті одного ізольованого осцилятора. Якщо маси осциляторів сильно різняться $m_2 \gg m_1$ при $l_1 = l_2 = l$, то частоти нормальних коливань дорівнюють

$$\omega_1^2 \approx \frac{1}{2} \omega_0^2; \quad \omega_2^2 \approx \omega_0^2 \frac{2m_2}{m_1}. \quad (2.74)$$

Щоб зрозуміти характер коливань осциляторів у двох модах скористаємося формулою (2.30). Підставляючи в неї вирази для частот і коефіцієнтів, знаходимо в основному наближенні:

$$\begin{cases} \phi_2^{(1)} = \phi_1^{(1)}; \\ \phi_2^{(2)} = -\phi_1^{(2)}. \end{cases} \quad (2.75)$$

Таким чином, перша мода ($\phi_2^{(1)} = \phi_1^{(1)}$) відповідає синфазним коливанням, за яких обидва маятники коливаються як ціле (рис. 2.11а). Друга мода ($\phi_2^{(2)} = -\phi_1^{(2)}$) відповідає протифазним коливанням (рис. 2.11б). У цьому випадку важка частинка залишається нерухливою, а легка коливається близько до вертикальної осі.

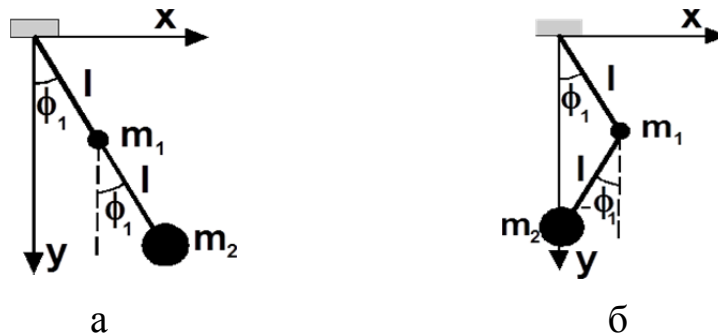


Рис. 2.11

2.6. Описати малі коливання плоского маятника, масивна точка підвісу якого може вільно переміщатися уздовж горизонтальної прямої (рис. 2.12).

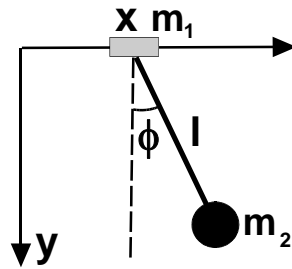


Рис. 2.12

Розв'язок. Декартові координати точки підвісу – $(x, 0)$, а самого маятника – $(x + l \sin \phi, l \cos \phi)$, тому функція Лагранжа має вигляд:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\phi}^2 + m_2 l \cos \phi \dot{x} \dot{\phi} + m_2 g l \cos \phi.$$

Обмежуючись у лагранжиані квадратичним по $x, \dot{x}, \phi, \dot{\phi} \ll 1$ наближенням

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\phi}^2 + m_2 l \dot{x} \dot{\phi} - \frac{m_2 g l}{2} \phi^2,$$

отримаємо рівняння руху:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \ddot{\phi} = 0; \\ m_2 l \ddot{x} + m_2 l^2 \ddot{\phi} + m_2 g l \phi = 0. \end{cases}$$

Один із розв'язків має нульову частоту. То є так звана *зсувова мода*. Для неї із другого рівняння випливає, що в цьому розв'язку $\phi = 0$. З форми лагранжиана видно, що координата x є циклічною і зберігається відповідний їй узагальнений імпульс $\partial L / \partial \dot{x} = (m_1 + m_2) \dot{x} + m_2 g l \dot{\phi} = 0$. Таким чином, $\dot{x} = \text{const}$ і система з маятником, що висить вертикально, переміщається як ціле з постійною швидкістю. Другій нормальній моді відповідає частота

$$\omega^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l}$$

і співвідношення зсувів

$$l \phi = -\frac{m_1 + m_2}{m_2} x.$$

При $m_1 \gg m_2$ точка підвісу є нерухливою і маятник коливається зі звичайною частотою $\omega^2 \approx \omega_0^2 = g/l$. У протилежному граничному випадку $m_1 \ll m_2$ частота $\omega \gg \omega_0$ й $l\phi + x = 0$. Але оскільки $l\phi + x = x_2$ є декартовою координатою точки з масою m_2 , то сам маятник залишається нерухливим, а коливається тільки точка підвісу. Нарешті, при $m_1 = m_2$ маємо $l\phi + x = x_2 = -x$: маятник і точка підвісу коливаються в протифазі з однаковою амплітудою.

2.7. Описати малі коливання плоского маятника, з'єданого з точкою підвісу пружиною, що має в нерозтягнутому стані довжину l_0 (рис. 2.13).

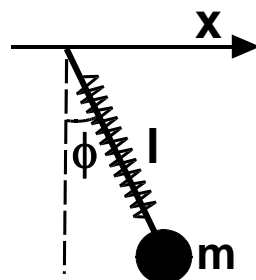


Рис. 2.13

Розв'язок. Кінетична енергія дорівнює $T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2$, а потенціальна енергія дорівнює $U = k(l - l_0)^2/2 - mgl \cos \phi$. Як узагальнені координати зручно вибрати величини $l(t)$ й $\phi(t)$, у термінах яких лагранжиан має вигляд:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{l}^2 + l^2 \dot{\phi}^2) - \frac{k}{2}(l - l_0)^2 + mgl \cos \phi.$$

Для опису лінійних коливань у лагранжиані слід залишити тільки доданки, які є квадратичними за $\lambda = l - l_0$, ϕ та їхніми похідними $\dot{\lambda}$, $\dot{\phi}$. При цьому він зводиться до виразу

$$L \approx \frac{m}{2}(\dot{\lambda}^2 + l_0^2 \dot{\phi}^2) - \frac{k}{2}\lambda^2 + mg\lambda - \frac{mgl_0}{2}\phi^2.$$

Ми бачимо, що в лінійному наближенні два ступені свободи не стикаються один з одним, тому частоти двох нормальних мод дорівнюють $\omega_1^2 = l/g$ та $\omega_2^2 = k/m$ для коливань маятника та коливань пружини відповідно.

2.8. Знайти частоти малих коливань зарядженого математичного маятника (із зарядом e), який коливається у двох напрямках і перебуває

в полі сили тяжіння й у перпендикулярному йому зовнішньому електричному полі E (рис. 2.14).

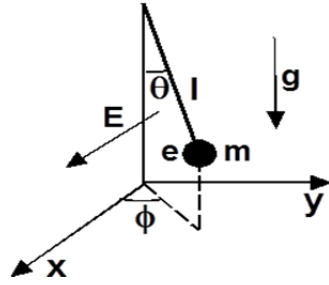


Рис. 2.14

Розв'язок. У даному прикладі функція Лагранжа має вигляд:

$$L = \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + mgl \cos \theta + eEl \sin \theta \cos \phi$$

і в основному стані маятник відхилений від вертикальної осі на кут $\theta_0 = \arctg(eE/mg)$. Рівняння коливань із довільною амплітудою

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 + \omega_0^2 \sin \theta - \operatorname{tg} \theta_0 \cos \theta \cos \phi = 0; \\ \frac{d}{dt} (\sin^2 \theta \dot{\phi}) + \frac{eE}{ml} \sin \theta \sin \phi = 0, \end{cases}$$

де $\omega_0^2 = g/l$ – частота плоских коливань у відсутності електричного поля, слід лінеаризувати за малими відхиленнями $\phi \ll 1$ і $\theta - \theta_0 = \psi \ll 1$. При цьому рівняння для двох змінних розділяються:

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \sqrt{1 + (eE/mg)^2} \phi = 0; \quad \ddot{\psi} + \omega_0^2 \sqrt{1 + (eE/mg)^2} \psi = 0.$$

Ми знову зустрічаємося із системою з виродженими частотами нормальних мод: $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_0^2 \sqrt{1 + (eE/mg)^2}$.

2.9. Розглянути ту ж задачу у відсутності зовнішнього електричного поля (рис. 2.15).

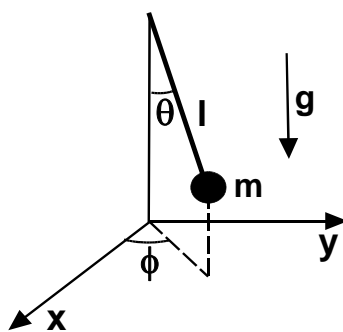


Рис. 2.15

Розв'язок. У цьому випадку функція Лагранжа спрощується:

$$L = \frac{ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + mgl \cos \theta.$$

Тепер узагальнена координата ϕ стає циклічною і відповідний узагальнений імпульс зберігається: $\dot{\phi} = \Omega$. Маятник обертається навколо точки підвісу з частотою (кутовою швидкістю) $\dot{\phi} = \Omega$. Друге рівняння Лагранжа (для змінної θ) має вигляд:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta - \Omega^2 \sin \theta \cos \theta = 0,$$

де $\omega_0^2 = g/l$. При малих частотах обертання маятника $\Omega < \omega_0$ він, крім обертового руху, робить малі коливання поблизу основного стану з частотою $\nu = \sqrt{\omega_0^2 - \Omega^2}$. При $\Omega > \omega_0$ основний стан змінюється: маятник обертається й одночасно коливається, але вже навколо стану з $\theta = \theta_0 = \arccos(\omega_0/\Omega)^2$. Уводячи малі відхилення від цього кута $\varepsilon = \theta - \theta_0$ і лінеаризуючи рівняння відносно $\varepsilon \ll 1$, отримаємо

$$\ddot{\varepsilon} + \varepsilon (\Omega^4 - \omega_0^4) / \Omega^2 = 0.$$

Зі зростанням частоти обертання частота коливань (частота нутації) зростає, а кут відхилення маятника від вертикалі йде до величини $\theta_0 = \pi/2$.

Таким чином, у даному завданні розв'язок є двочастотним, але частоти однозначно зв'язані між собою: $\nu^2 + \Omega^2 = \omega_0^2$.

2.10. Описати малоамплітудну динаміку двох зв'язаних магнітних моментів у ферромагнетику з анізотропією типу осі легкого намагнічування (рис. 2.16).

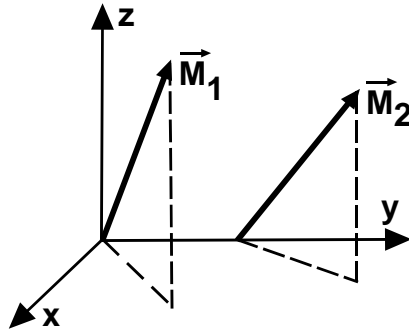


Рис. 2.16

Будемо вважати магнітні моменти \vec{M}_1, \vec{M}_2 класичними векторами. У цьому випадку можна скористатися рівняннями Ландау – Ліфшиця:

$$\dot{\vec{M}}_i = \left[\vec{M}_i, \frac{\partial H}{\partial \vec{M}_i} \right], \quad i = 1, 2. \quad (2.76)$$

Гамильтоніан H у рівняннях (2.66) у випадку легковісного феромагнетика має вигляд:

$$H = -J(\vec{M}_1, \vec{M}_2) - \frac{\beta}{2}(\vec{M}_1, \vec{n}_z)^2 - \frac{\beta}{2}(\vec{M}_2, \vec{n}_z)^2, \quad (2.77)$$

де $J > 0$ – константа обмінної взаємодії й $\beta > 0$ – константа одновісної анізотропії, \vec{n}_z – одиничний вектор напрямку осі z .

Розв’язок. Рівняння Ландау – Ліфшиця (2.66) для двох зв’язаних магнітних моментів набувають вигляду:

$$\begin{cases} \dot{\vec{M}}_1 = -J[\vec{M}_1, \vec{M}_2] - \beta\vec{M}_1, \vec{n}_z; \\ \dot{\vec{M}}_2 = -J[\vec{M}_2, \vec{M}_1] - \beta\vec{M}_2, \vec{n}_z. \end{cases} \quad (2.78)$$

Довжина кожного магнітного моменту зберігається: $|\vec{M}_1| = |\vec{M}_2| = M_0$.

Тому рівняння можна записати тільки для двох компонент моментів: M_i^x і M_i^y . Зручно замість них ввести комплексні величини

$$\psi_i = M_i^x + iM_i^y, \quad i = 1, 2, \quad (2.79)$$

які є класичним аналогом квантових операторів народження та знищення магнітних квазічастинок – магнонів. У термінах ψ_1, ψ_2 рівняння динаміки магнітних моментів набувають вигляду:

$$\begin{cases} i\dot{\psi}_1 = -\beta\psi_1 M_1^z - J(\psi_1 M_2^z - \psi_2 M_1^z); \\ i\dot{\psi}_2 = -\beta\psi_2 M_2^z - J(\psi_2 M_1^z - \psi_1 M_2^z), \end{cases} \quad (2.80)$$

де $M_i^z = \sqrt{M_0^2 - |\psi_i|^2}$, $i=1, 2$. Малим коливанням відповідають малі відхилення магнітних моментів, які обертаються навколо осі z від осі обертання. В основному наближенні можна покласти $M_i^z \approx M_0$. При цьому маємо систему двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} i\dot{\psi}_1 = -(J + \beta)\psi_1 M_0 + J\psi_2 M_0; \\ i\dot{\psi}_2 = -(J + \beta)\psi_2 M_0 + J\psi_1 M_0. \end{cases} \quad (2.81)$$

Лінійні коливання системи мають вигляд: $\psi_i = a_i \exp(i\omega t)$, а амплітуди задовольняють систему лінійних рівнянь

$$\begin{pmatrix} \omega - (J + \beta)M_0 & JM_0 \\ JM_0 & \omega - (J + \beta)M_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.82)$$

На відміну від розглянутих раніше зв'язаних лінійних осциляторів, у цьому випадку характеристичне рівняння залежить не від квадратів частот, а від самих частот. Це – специфіка магнітних систем. Двом нормальним модам відповідають частоти

$$\begin{cases} \omega_1 = \beta M_0; \\ \omega_2 = (2J + \beta)M_0. \end{cases} \quad (2.83)$$

Частоті ω_1 відповідають «синфазні коливання» – обертання двох магнітних моментів у фазі, а частоті ω_2 – «протифазні коливання» – синфазне обертання моментів, але зі зміщенням фази на π (див. рис. 2.17).

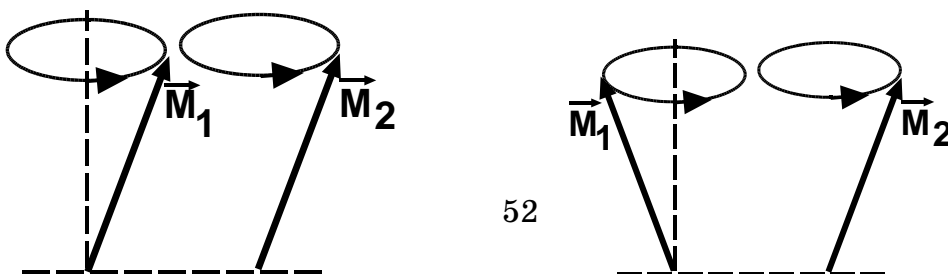


Рис. 2.17

Пропоновані нижче завдання з формальними функціями Лагранжа допоможуть на простих прикладах опанувати методи знаходження власних частот і нормальних коливань.

У задачах 2.1.11–2.1.13 треба знайти частоти власних коливань систем, які описуються заданими функціями Лагранжа.

2.11. Функція Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2}(q_1 \dot{q}_1^2 + q_2 \dot{q}_2^2) - \left(\frac{1}{q_1 q_2} + q_1 + q_2 \right). \quad (2.84)$$

Розв'язок. Знаходимо значення q_1 і q_2 , які відповідають мінімуму потенціальної енергії, з наступних умов:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 1 - \frac{1}{q_2 q_1^2} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 1 - \frac{1}{q_1 q_2^2} = 0,$$

звідки

$$q_1^{(0)} = q_2^{(0)} = 1.$$

Значення других похідних у цій точці –

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} \right)_0 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} \right)_0 = 2; \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0 = 1,$$

отже,

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} \right)_0 > 0; \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} \right)_0 \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} \right)_0 - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0^2 = 3 > 0$$

і умови мінімуму виконано. Знаходимо функцію Лагранжа для малих відхилень від положення рівноваги. Для цього підставляємо рівноважні значення $q_1^{(0)} = q_2^{(0)} = 1$ у вираження для кінетичної енергії та переходимо до відхилень від положення рівноваги замість координат, тобто вводимо нові координати:

$$\begin{cases} x = q_1 - q_1^{(0)} = q_1 - 1; \\ y = q_2 - q_2^{(0)} = q_2 - 1 \end{cases}$$

і отримуємо замість (2.74)

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - (x^2 + y^2 + xy). \quad (2.85)$$

Запишемо рівняння руху для функції Лагранжа (2.85):

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2x + y = 0; \\ \ddot{y} + 2y + x = 0. \end{cases} \quad (2.86)$$

Маємо систему двох лінійних однорідних диференціальних рівнянь із двома невідомими, розв'язок якої слід шукати у вигляді

$$x = A_1 e^{i\omega t}; \quad y = A_2 e^{i\omega t}. \quad (2.87)$$

Підставляючи (2.87) у (2.86), знаходимо

$$\begin{cases} (2 - \omega^2) A_1 + A_2 = 0; \\ A_1 + (2 - \omega^2) A_2 = 0. \end{cases} \quad (2.88)$$

Для того щоб ці два лінійні однорідні алгебраїчні рівняння мали нетривіальні розв'язки, треба, щоб визначник з коефіцієнтів при невідомих A_1 і A_2 у цих рівняннях дорівнював нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 - \omega^2 & 1 \\ 1 & 2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.89)$$

За допомогою (2.89) складемо характеристичне рівняння, яке й визначає частоти малих коливань:

$$(2 - \omega^2)^2 - 1 = (1 - \omega^2)(3 - \omega^2) = 0. \quad (2.90)$$

Розв'язки бікватратного рівняння (2.90) дають квадрати частот малих коливань. У цьому випадку маємо $\omega_1^2 = 1$; $\omega_2^2 = 3$. Слід зауважити, що в даній системі, як це випливає з (2.88), низькочастотна мода з $\omega_1 = 1$ відповідає протифазним коливанням з $A_1 = -A_2$, а високочастотна мода з $\omega_2 = \sqrt{3}$ – синфазним коливанням з $A_1 = A_2$.

2.12. Функція Лагранжа має вигляд:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) - (q_1^3 - q_2^3 + 3q_1q_2). \quad (2.91)$$

Розв'язок. Мінімум потенціальної енергії для функції Лагранжа (2.91) перебуває в точці

$$q_1^{(0)} = 1, q_2^{(0)} = -1.$$

Другі похідні в цій точці дорівнюють

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right)_0 = 6, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0 = 3,$$

тобто

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0 > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0^2 > 0.$$

Функція Лагранжа для малих коливань із точністю до квадратичних доданків зводиться до

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2) - 3(x^2 + xy + y^2), \quad (2.92)$$

де $x = q_1 - 1, y = q_2 + 1$.

Підставляючи у відповідні рівняння руху

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{1}{2}\ddot{y} + 6x + 3y = 0; \\ \frac{1}{2}\ddot{x} + \ddot{y} + 3x + 6y = 0 \end{cases}$$

залежності координат від часу $x = A_1 e^{i\omega t}, y = A_2 e^{i\omega t}$, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} (6 - \omega^2)A_1 + \left(3 - \frac{1}{2}\omega^2\right)A_2 = 0; \\ \left(3 - \frac{1}{2}\omega^2\right)A_1 + (6 - \omega^2)A_2 = 0. \end{cases}$$

Будуємо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 6 - \omega^2 & 3 - \frac{\omega^2}{2} \\ 3 - \frac{\omega^2}{2} & 6 - \omega^2 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}(\omega^4 - 12\omega^2 + 36) = \frac{3}{4}(\omega^2 - 6)^2 = 0,$$

корені якого дорівнюють $\omega_1^2 = \omega_2^2 = 6$.

У даному прикладі ми маємо ситуацію з виродженням частот нормальних мод. У цьому випадку підстановка отриманих частот у наведені вище алгебраїчні рівняння не дає нам співвідношення амплітуд різних координат у нормальних модах (див., наприклад, «Класичну механіку» Г. Голдстейна [14]). Для знаходження цього співвідношення необхідно скористатися умовою ортогональності нормальних мод. Продемонструємо це. Повернемося до лагранжиану (2.81) та зробимо лінійне перетворення:

$$\begin{cases} x = u + cv, \\ y = au + bv. \end{cases} \quad (2.93)$$

Через лінійність рівнянь одну константу перетворення можна покласти рівною одиниці. Підстановка цього перетворення в лагранжиан (2.91) приводить його до вигляду:

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}(1 + a^2 + a)\dot{u}^2 - 3(1 + a^2 + a)u^2 + \frac{1}{2}(c^2 + b^2 + bc)\dot{v}^2 - \\ & - 3(c^2 + b^2 + bc)v^2 + (2c + 2ab + b + ca)\left(\frac{1}{2}\dot{u}\dot{v} - 3uv\right). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Умовою того, щоб змінні (u, v) являли собою незалежні нормальні моди, є наступне:

$$2c + 2ab + b + ca = 0. \quad (2.95)$$

Лагранжиан розпадається на дві незалежні частини для координати u та координати v . Відповідні динамічні рівняння коливань мають вигляд:

$$\begin{cases} \ddot{u} + 6u = 0; \\ \ddot{v} + 6v = 0 \end{cases} \quad (2.96)$$

з частотами $\omega = \sqrt{6}$. При цьому співвідношення амплітуд окремих осциляторів у нормальних модах ще залишається невизначеним:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} v. \quad (2.97)$$

Скористаємося умовою ортогональності нормальних мод:

$$c + ab = 0. \quad (2.98)$$

Разом з наведеною вище умовою на константи (2.95) рівняння (2.98) приводить до співвідношення $a = 1; b = -c$ та до загального розв'язку вигляду

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} c v. \quad (2.99)$$

Вираз (2.99) представляє собою суму синфазних і протифазних коливань.

2.13. Функція Лагранжа має вигляд:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) - \left[\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ln(q_1q_2) \right]. \quad (2.100)$$

Розв'язок. Мінімум потенціальної енергії для лагранжиана (2.100) досягається при

$$q_1^{(0)} = q_2^{(0)} = 1.$$

Другі похідні в цій точці дорівнюють

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} \right)_0 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} \right)_0 = 1; \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0 = 0,$$

тобто

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0 > 0, \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_0^2 > 0.$$

Таким чином, у малоамплітудному граничному випадку

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad (2.101)$$

де $x = q_1 - 1$, $y = q_2 - 1$, рівняння руху мають вигляд:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{1}{2}\ddot{y} + x = 0; \\ \frac{1}{2}\ddot{x} + \ddot{y} + y = 0. \end{cases}$$

Розв'язок шукаємо у вигляді $x = A_1 e^{i\omega t}$; $y = A_2 e^{i\omega t}$. Знаходимо

$$\begin{cases} (1 - \omega^2)A_1 - \frac{1}{2}\omega^2 A_2 = 0; \\ -\frac{1}{2}\omega^2 A_1 + (1 - \omega^2)A_2 = 0. \end{cases}$$

Будуємо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1 - \omega^2 & -\frac{\omega^2}{2} \\ -\frac{\omega^2}{2} & 1 - \omega^2 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}\omega^4 - 2\omega^2 + 1 = 0.$$

Знаходимо частоти нормальних мод: $\omega_1^2 = 2/3$; $\omega_2^2 = 2$. З рівнянь для амплітуд випливає, що низькочастотна мода з $\omega_1^2 = 2/3$ відповідає синфазним коливанням з $A_1 = A_2$, а високочастотна мода з $\omega_2^2 = 2$ – антифазним коливанням з $A_1 = -A_2$.

У задачах 2.14–2.15 треба знайти власні частоти й нормальні координати для систем, які описуються заданими функціями Лагранжа.

2.14. Розглянемо систему з наступною функцією Лагранжа:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(x^2 - xy + y^2). \quad (2.102)$$

Розв'язок. У цьому випадку лагранжиан (2.102) є квадратичним за координатами і швидкостями і описує систему з двома ступенями свободи, що відповідає малим коливанням.

Виводимо рівняння руху:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{1}{2}\ddot{y} + x - \frac{1}{2}y = 0; \\ \frac{1}{2}\ddot{x} + \ddot{y} - \frac{1}{2}x + y = 0. \end{cases}$$

Шукаємо координати x й y у вигляді $x = A_1 e^{i\omega t}$; $y = A_2 e^{i\omega t}$ або у векторній формі як вектор-стовпець:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}.$$

Отримуємо систему двох лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно A_1, A_2 :

$$\begin{cases} (1 - \omega^2)A_1 - \frac{1}{2}(1 + \omega^2)A_2 = 0; \\ -\frac{1}{2}(1 + \omega^2)A_1 + (1 - \omega^2)A_2 = 0. \end{cases} \quad (2.103)$$

Визначник цієї системи для нетривіальних розв'язків має дорівнювати нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 - \omega^2 & -\frac{1}{2}(1 + \omega^2) \\ -\frac{1}{2}(1 + \omega^2) & 1 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

що й дає нам характеристичне рівняння для визначення частот:

$$(1 - \omega^2)^2 - \frac{1}{4}(1 + \omega^2)^2 = \frac{1}{4}(1 - 3\omega^2)(3 - \omega^2) = 0.$$

Квадрати частот у цьому випадку дорівнюють, відповідно, $\omega_1^2 = 1/3$ й $\omega_2^2 = 3$, де індекс нумерує нормальні моди. Вводимо ці нормальні коливання в такий спосіб:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \operatorname{Re}\left(A^{(1)} e^{i\omega_1 t}\right) = \operatorname{Re}\left(A^{(1)} e^{it/\sqrt{3}}\right); \\ \theta_2 &= \operatorname{Re}\left(A^{(2)} e^{i\omega_2 t}\right) = \operatorname{Re}\left(A^{(2)} e^{i\sqrt{3}t}\right).\end{aligned}$$

Амплітуди нормальних мод $A^{(i)}$ являють собою стовпці

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} A_1^{(i)} \\ A_2^{(i)} \end{pmatrix}; \quad i = 1, 2$$

з амплітудами кожної з координат у відповідній моді. Підставляючи нормальні частоти в рівняння (2.93), отримуємо для кожної частоти співвідношення амплітуд координат у кожній моді:

$$\begin{aligned}\omega = \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}; & \quad A_1^{(1)} / A_2^{(1)} = 1; \\ \omega = \omega_2 = \sqrt{3}; & \quad A_1^{(2)} / A_2^{(2)} = -1.\end{aligned}$$

Як і раніше, нижні індекси нумерують координати, а індекси в дужках – моди. Таким чином, загальний розв’язок має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a e^{i\omega_1 t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} b e^{i\omega_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \theta_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \theta_2,$$

де a й b – довільні амплітуди окремих мод. Підстановка цього розв’язку в початковий лагранжиан (2.102) приводить його до суми двох незалежних лагранжианів для нормальних мод:

$$L = \frac{3}{2}(\dot{\theta}_1^2 - \omega_1^2 \theta_1^2) + \frac{1}{2}(\dot{\theta}_2^2 - \omega_2^2 \theta_2^2),$$

а саме суму двох функцій Лагранжа для двох незалежних одновимірних осциляторів із власними частотами ω_1 і ω_2 . Відмінність констант при двох квадратичних формах не є принциповою, тому що амплітуди нормальних мод є довільними. Однак зазвичай (див. «Механіка» Л. Д. Ландау й Є. М. Ліфшиця [1]) проводиться перенормування амплітуд так, щоб

у загальному лагранжиані коефіцієнти при узагальнених швидкостях дорівнювали 1/2: $\Theta_1 = \sqrt{3}\theta_1$ і $\Theta_2 = \theta_2$. При цьому

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\Theta}_1^2 - \omega_1^2 \Theta_1^2) + \frac{1}{2}(\dot{\Theta}_2^2 - \omega_2^2 \Theta_2^2)$$

і

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Theta_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Theta_2.$$

2.15. Розглянути коливання системи з функцією Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}(2\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(3x^2 + 2y^2). \quad (2.104)$$

Розв'язок. Знаходимо рівняння руху:

$$\begin{cases} 2\ddot{x} + \ddot{y} + 3x = 0; \\ \ddot{x} + \ddot{y} + 2y = 0. \end{cases} \quad (2.105)$$

Розв'язок (2.105) шукаємо у вигляді

$$\begin{cases} x = A_1 e^{i\omega t}; \\ y = A_2 e^{i\omega t}. \end{cases} \quad (2.106)$$

Підставляючи його в рівняння руху (2.105), отримуємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} (3 - 2\omega^2)A_1 - \omega^2 A_2 = 0; \\ -\omega^2 A_1 + (2 - \omega^2)A_2 = 0. \end{cases} \quad (2.107)$$

Будуємо характеристичне рівняння та знаходимо його розв'язок (квадрати частот нормальних мод):

$$\begin{vmatrix} (3 - 2\omega^2) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & (2 - \omega^2) \end{vmatrix} = \omega^4 - 7\omega^2 + 6 = 0;$$

$$\omega_1^2 = 1, \quad \omega_2^2 = 6.$$

Нормальні координати вводяться звичайним чином:

$$\theta_1 = \text{Re}\left(A^{(1)} e^{it}\right); \quad \theta_2 = \text{Re}\left(A^{(2)} e^{i\sqrt{6}t}\right).$$

Амплітуди нормальних мод $A^{(i)}$ являють собою стовпці

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} A_1^{(i)} \\ A_2^{(i)} \end{pmatrix}$$

з амплітудами кожної з координат у відповідній моді. Щоб виразити початкові координати x та y через нормальні координати, покладаємо в рівняннях (2.107) послідовно $\omega^2 = \omega_1^2 = 1$ та $\omega^2 = \omega_2^2 = 6$ і знаходимо зв'язок між амплітудами в кожній з нормальних мод:

$$A_2^{(1)} = A_1^{(1)}; \quad A_2^{(2)} = -\frac{3}{2}A_1^{(2)}.$$

Таким чином, перша нормальна мода з меншою частотою відповідає синфазним коливанням, а друга – з більшою частотою – протифазній моді. Оскільки амплітуди нормальних мод є довільними, то загальний розв'язок має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a e^{i\omega_1 t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix} b e^{i\omega_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \theta_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix} \theta_2,$$

де a та b – довільні амплітуди мод.

Підставляючи цей розв'язок у початковий лагранжиан, приводимо його до суми двох незалежних лагранжианів нормальних мод:

$$L = \frac{5}{2}(\dot{\theta}_1^2 - \omega_1^2 \theta_1^2) + \frac{5}{8}(\dot{\theta}_2^2 - \omega_2^2 \theta_2^2).$$

Якщо перенормувати амплітуди нормальних мод у такий спосіб:

$$\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \Theta_1; \quad \theta_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} \Theta_2,$$

то лагранжиан прийме стандартний вигляд:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\Theta}_1^2 - \omega_1^2 \Theta_1^2) + \frac{1}{2}(\dot{\Theta}_2^2 - \omega_2^2 \Theta_2^2) = \frac{1}{2}(\dot{\Theta}_1^2 - \Theta_1^2) + \frac{1}{2}(\dot{\Theta}_2^2 - 6\Theta_2^2).$$

Відповідні нормальні координати запишуться у вигляді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Theta_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Theta_2.$$

2.3. ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 2

У задачах 2.16.–2.27 потрібно знайти власні частоти для систем, які описуються заданими функціями Лагранжа.

$$2.16. L = \frac{\dot{q}_1^2}{q_1} + \frac{\dot{q}_2^2}{q_2} - q_1^3 - \frac{5}{2}q_2^2 - 5q_1 + 6q_2 + 4q_1q_2.$$

$$\text{Відповідь: } q_1^{(0)} = 1, q_2^{(0)} = 2; \quad \omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 7.$$

$$2.17. L = \dot{q}_1^2 + q_1q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 + q_1^3 - \frac{5}{2}q_2^2 - 3q_1 + 4q_2 + 4q_1q_2.$$

$$\text{Відповідь: } q_1^{(0)} = -1, q_2^{(0)} = 2; \quad \omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 7.$$

$$2.18. L = \frac{1}{2} \left[(q_2^3 + 1)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + 3(q_1^3 + 1)\dot{q}_1\dot{q}_2 \right] - \left(9q_2^2 + 12q_2 - \frac{11}{6}q_1^3 + \frac{11}{2}q_1 + 12q_1q_2 \right).$$

$$\text{Відповідь: } q_1^{(0)} = -1, q_2^{(0)} = 0; \quad \omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 27.$$

$$2.19. L = q_1(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \left(\frac{11}{3}q_1^3 + 9q_2^2 + 12q_1q_2 + \frac{5}{4}q_1 \right).$$

$$\text{Відповідь: } q_1^{(0)} = \frac{1}{2}, q_2^{(0)} = -\frac{1}{3}; \quad \omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 27.$$

$$2.20. L = 2q_1\dot{q}_1^2 + 6q_2\dot{q}_2^2 + (q_1 - 3q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 - \left(2q_1^3 - 2q_1q_2 + 3q_2^2 - \frac{5}{24}q_1 \right).$$

$$\text{Відповідь: } q_1^{(0)} = \frac{1}{4}, q_2^{(0)} = \frac{1}{12}; \quad \omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 7.$$

$$2.21. L = (q_1 + 1)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{3}q_2\dot{q}_2^2 - (q_1 - 1)\dot{q}_1\dot{q}_2 - (2q_1^3 + 3q_2^2 - 4q_1q_2 - 5q_2).$$

$$\text{Відповідь: } q_1^{(0)} = 1, q_2^{(0)} = \frac{3}{2}; \quad \omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 7.$$

$$2.22. L = 2 \left(\frac{\dot{q}_1^2}{(q_1 - 1)^2} + (q_1 + 1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2 \right) + \\ + \frac{7}{12} q_1^3 - 15 q_2^2 + 3 q_1 q_2 - \frac{7}{4} q_1 + 3 q_2.$$

Відповідь: $q_1^{(0)} = -1, q_2^{(0)} = 0; \omega_1^2 = 3, \omega_2^2 = 8.$

$$2.23. L = \frac{2 \dot{q}_1^2}{(q_1 + 1)^2} + \frac{1}{2} q_2^2 + \frac{2(q_1 - 1)}{q_1 + 1} \dot{q}_1 \dot{q}_2 - \\ - \frac{2}{3} q_1^3 - 10 q_2^2 + 6 q_1 q_2 - 4 q_1 + 14 q_2.$$

Відповідь: $q_1^{(0)} = 1, q_2^{(0)} = 1; \omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 22.$

$$2.24. L = \frac{\dot{q}_1^2}{4 q_1} + (2 q_1 - 1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{11}{3} q_2 \dot{q}_2^2 - 2 q_1^3 - 11 q_2^2 + 6 q_1 q_2 + \frac{15}{22} q_1.$$

Відповідь: $q_1^{(0)} = \frac{1}{2}, q_2^{(0)} = \frac{3}{22}; \omega_1^2 = 4, \omega_2^2 = 24.$

$$2.25. L = \frac{1}{6 q_1} \left[\dot{q}_1^2 + (3 q_1 - 1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2 \right] - 2 q_1^3 - \frac{7}{2} q_2^2 + 2 q_1 q_2 + \frac{5}{2} q_2.$$

Відповідь: $q_1^{(0)} = \frac{1}{3}, q_2^{(0)} = \frac{1}{3}; \omega_1^2 = 3, \omega_2^2 = 8.$

$$2.26. L = \left(q_1 + \frac{1}{6} \right) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 5 q_1^3 - 2 q_2^2 + 4 q_1 q_2 + \frac{1}{3} q_1.$$

Відповідь: $q_1^{(0)} = \frac{1}{3}, q_2^{(0)} = \frac{1}{3}; \omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 12.$

$$2.27. L = \frac{1}{2} \left[\dot{q}_1^2 + (3 q_1 - 1)^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (3 q_1 + 1)^2 \dot{q}_2^2 \right] - \\ - \left(2 q_1^3 + 20 q_2^2 - 8 q_1 q_2 - \frac{2}{15} q_1 \right).$$

Відповідь: $q_1^{(0)} = \frac{1}{3}, q_2^{(0)} = \frac{1}{15}; \omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 12.$

Задачі 2.28–2.63 пропонуються для самостійного розв'язку. У них треба знайти власні частоти малих коливань і нормальні координати систем, які описуються заданими функціями Лагранжа.

У задачах 2.28–2.42 функція Лагранжа вже має вигляд квадратичної форми, а в задачах 2.43–2.63 треба спочатку привести її до належного вигляду.

$$2.28. L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - \frac{1}{2}(2x^2 - 4xy + 8y^2).$$

$$\text{Відповідь: } \omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 3; \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{\sqrt{2}}{4}(\Theta_1 - \Theta_2).$$

У векторній формі нормальні координати можна представити у вигляді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Theta_1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.29. L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - (x^2 + 2xy + 3y^2).$$

$$\text{Відповідь: } \omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 4; \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\Theta_1 + \Theta_2\right).$$

$$2.30. L = \frac{1}{4}\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - \frac{1}{2}(x^2 - 4xy + 12y^2).$$

Відповідь:

$$\omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 4; \quad x = \sqrt{\frac{2}{3}}(\sqrt{2}\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\Theta_1 - \sqrt{2}\Theta_2).$$

$$2.31. L = \frac{1}{4}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}(x^2 - 2xy + 3y^2).$$

$$\text{Відповідь: } \omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 4; \quad x = \sqrt{\frac{2}{3}}(\sqrt{2}\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}(\Theta_1 - \sqrt{2}\Theta_2).$$

$$2.32. L = \frac{1}{4}\dot{x}^2 + \frac{9}{2}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}(x^2 - 6xy + 27y^2).$$

$$\text{Відповідь: } \omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 4; \quad x = \sqrt{\frac{2}{3}}(\sqrt{2}\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{3\sqrt{3}}(\Theta_1 - \sqrt{2}\Theta_2).$$

$$2.33. L = \frac{1}{2}(2\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 3x^2 + 4xy - \frac{5}{2}y^2.$$

$$\text{Відповідь: } \omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 7; \quad x = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}(\Theta_1 - \sqrt{2}\Theta_2).$$

$$2.34. L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(11x^2 + 24xy + 18y^2).$$

$$\text{Відповідь: } \omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 27; \quad x = \frac{1}{5}(4\Theta_1 + 3\Theta_2); \quad y = \frac{1}{3\sqrt{3}}(-3\Theta_1 + 4\Theta_2).$$

$$2.35. L = 2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 - 5x^2 + xy - \frac{5}{4}y^2.$$

$$\text{Відповідь: } \omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 3; \quad x = \frac{\sqrt{2}}{4}(\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\Theta_1 - \Theta_2).$$

$$2.36. L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + 3\dot{y}^2) - (x^2 + 3xy + 6y^2).$$

$$\text{Відповідь: } \omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 5, \quad x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\Theta_1 + \Theta_2\right).$$

$$2.37. L = \frac{1}{6}\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^2 - 4xy + 16y^2\right).$$

$$\text{Відповідь: } \omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 5; \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{4}(\Theta_1 - \sqrt{3}\Theta_2).$$

$$2.38. L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(3x^2 + 4xy + 3y^2).$$

$$\text{Відповідь: } \omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 5; \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\Theta_1 + \Theta_2).$$

$$2.39. L = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{1}{9}\dot{y}^2\right) - \frac{1}{2}\left(3x^2 - \frac{4}{3}xy + \frac{1}{3}y^2\right).$$

$$\text{Відповідь: } \omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 5; \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{3}{\sqrt{2}}(\Theta_1 - \Theta_2).$$

$$2.40. L = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{1}{4}\dot{y}^2\right) - \frac{3}{2}x^2 - xy - \frac{3}{8}y^2.$$

$$\text{Відповідь: } \omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 5; \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \sqrt{2}(-\Theta_1 + \Theta_2).$$

$$2.41. L = \dot{x}^2 + \frac{1}{4}\dot{y}^2 - 3x^2 + 2xy - \frac{3}{4}y^2.$$

$$\text{Відповідь: } \omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 5; \quad x = \frac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = (\Theta_1 - \Theta_2).$$

$$2.42. L = \frac{3}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{6}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}(9x^2 + 4xy + y^2).$$

Відповідь: $\omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 5; \quad x = \frac{1}{\sqrt{6}}(\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \sqrt{\frac{3}{2}}(-\Theta_1 + \Theta_2).$

$$2.43. L = \frac{1}{2}(x-1)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(y^2 - 12)\dot{y} + \frac{x}{2}\dot{y}^2 - \frac{x^3}{3} - 2y^2 - 4xy - 7x - 4y.$$

Відповідь: $x_0 = 3, y_0 = -4; \quad \omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 4;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}}(\Theta_1 + 2\sqrt{2}\Theta_2); \quad y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\Theta_1 + \Theta_2).$$

$$2.44. L = x\dot{x}^2 + (y-2)\dot{y} + \frac{1}{y}\dot{y}^2 - \frac{7}{3}x^3 - 2y^2 + 4xy + 20x.$$

Відповідь: $x_0 = 2, y_0 = 2; \quad \omega_1^2 = 3, \omega_2^2 = 8;$

$$x = \frac{1}{2\sqrt{5}}(\Theta_1 + 2\Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\Theta_1 - \Theta_2).$$

$$2.45. L = x(\dot{x}^2 + 4\dot{y}^2) - \frac{11}{3}(2x-1)\dot{y} - \frac{11}{3}x^3 - 10y^2 + 8xy + \frac{23}{20}x.$$

Відповідь: $x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = \frac{1}{5}; \quad \omega_1^2 = 3, \omega_2^2 = 13;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Theta_1 + 2\Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Theta_1 - \frac{1}{2}\Theta_2\right).$$

$$2.46. L = (x+1)\dot{x}^2 + 2(x-1)\dot{y} + \frac{\dot{y}^2}{x+1} - \left(\frac{14}{3}x^3 + 2y^2 - 4xy - 10y\right).$$

Відповідь: $x_0 = 1, y_0 = \frac{7}{2}; \quad \omega_1^2 = 3, \omega_2^2 = 8;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}\Theta_1 + \Theta_2\right); \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\Theta_1 - \Theta_2).$$

$$2.47. L = \left(x + \frac{1}{6}\right)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 5x^3 - 2y^2 + 4xy + \frac{1}{3}x.$$

Відповідь: $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{1}{3}; \quad \omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 12;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Theta_1 + 2\Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\Theta_1 - \Theta_2).$$

2.48. $L = \frac{1}{4}\dot{x}^2 + (y - 3x)\dot{x}\dot{y} + \frac{1}{x}\dot{y}^2 - 3x^3 - 4y^2 + 6xy + 36y.$

Відповідь: $x_0 = 2, y_0 = 6; \quad \omega_1^2 = 6, \omega_2^2 = 14;$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\Theta_1 + \Theta_2\right); \quad y = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\Theta_1 - \Theta_2).$$

2.49. $L = \frac{1}{y}\dot{x}^2 + 2(y - 2)\dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2 - (4x^2 + y^3 - 4xy - 16x).$

Відповідь: $x_0 = 3, y_0 = 2; \quad \omega_1^2 = 4, \omega_2^2 = 10;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}(\Theta_1 + \sqrt{2}\Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\Theta_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Theta_2\right).$$

2.50. $L = \frac{x}{3}\dot{x}^2 - \left(\frac{4}{3}y - x\right)\dot{x}\dot{y} + \frac{\dot{y}^2}{x-1} - \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}y^2 - 4xy + \frac{3}{4}y\right).$

Відповідь: $x_0 = 3, y_0 = \frac{9}{4}; \quad \omega_1^2 = 1, \omega_2^2 = 7;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\Theta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Theta_2\right); \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}(\Theta_1 - \sqrt{2}\Theta_2).$$

2.51. $L = \frac{1}{2}\left[\dot{x}^2 + (3x - 1)\dot{x}\dot{y} + (3x + 1)^2\dot{y}^2\right] - 2x^3 - 20y^2 + 8xy + \frac{2}{15}x.$

Відповідь: $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{1}{15}; \quad \omega_1^2 = 2, \omega_2^2 = 12;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\Theta_1 - \Theta_2\right).$$

2.52. $L = x\dot{x}^2 + (y + 1)\dot{x}\dot{y} + \frac{x+1}{(y-1)^2}\dot{y}^2 - 8x^2 + y^3 + 4xy - 7y + 20x.$

Відповідь: $x_0 = 1, y_0 = -1; \quad \omega_1^2 = 4, \omega_2^2 = 10;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Theta_1 + \Theta_2\right); \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\Theta_1 - \Theta_2).$$

$$2.53. L = y\dot{x}^2 + (x - 2y)\dot{x}\dot{y} + y\dot{y}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}x^3 + 7y^2 - 4xy - 5x - 3y\right).$$

Відповідь: $x_0 = 1, y_0 = \frac{1}{2}; \quad \omega_1^2 = 5, \omega_2^2 = 9;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 - \Theta_2).$$

$$2.54. L = \frac{1}{2}(x + 2y)\dot{x}^2 + 2(x - y)\dot{x}\dot{y} + \frac{1}{x+1}\dot{y}^2 - \\ - 6x^3 - 4y^2 + 6xy + 12x + 2y.$$

Відповідь: $x_0 = 1, y_0 = 1; \quad \omega_1^2 = 6, \omega_2^2 = 14;$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\Theta_1 + \Theta_2\right); \quad y = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\Theta_1 - \Theta_2).$$

$$2.55. L = x\dot{x}^2 + (x - 2y)\dot{x}\dot{y} + y\dot{y}^2 - 2x^3 - 4y^2 + 4xy + 4x.$$

Відповідь: $x_0 = 1, y_0 = \frac{1}{2}; \quad \omega_1^2 = 4, \omega_2^2 = 10;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\Theta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Theta_2\right); \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}(\Theta_1 - \sqrt{2}\Theta_2).$$

$$2.56. L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - 3(y + 1)\dot{x}\dot{y} + x\dot{y}^2) - (x^3 + 3y^3 - 3xy - 6x + 9y).$$

Відповідь: $x_0 = 1, y_0 = -1; \quad \omega_1^2 = 3, \omega_2^2 = 9;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 - \Theta_2).$$

$$2.57. L = \frac{5}{1-x}\dot{x}^2 + (x + 1)\dot{x}\dot{y} + \frac{1}{2}\dot{y}^2 + 5x^3 - 5y^3 + 5xy - \frac{25}{2}x.$$

Відповідь: $x_0 = -1, y_0 = -\frac{1}{2}; \quad \omega_1^2 = 5, \omega_2^2 = 11;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\Theta_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\Theta_2\right); \quad y = \frac{1}{\sqrt{6}}(\Theta_1 - \sqrt{5}\Theta_2).$$

$$2.58. L = \frac{1}{2}[\dot{x}^2 - 2(x + 1)\dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2] + \frac{7}{6}x^3 - \frac{7}{2}y^2 + 2xy - \frac{31}{2}y + \frac{3}{2}x.$$

Відповідь: $x_0 = -1, y_0 = -\frac{5}{2}; \quad \omega_1^2 = 5, \omega_2^2 = 9;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 - \Theta_2).$$

2.59. $L = y\dot{x}^2 + (2y - 3x)\dot{x}\dot{y} + 3x\dot{y}^2 - \left(3x^3 + 8y^2 - 4xy + x - \frac{20}{3}y\right).$

Відповідь: $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{1}{2}; \quad \omega_1^2 = 4, \omega_2^2 = 10;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Theta_1 - \Theta_2\right).$$

2.60. $L = \frac{1}{2}(x + 2y)\dot{x}^2 + (x - 3y)\dot{x}\dot{y} + \frac{1}{2}y\dot{y}^2 -$
 $-\frac{5}{3}x^3 - 5y^2 + 5xy + 40x - 5y.$

Відповідь: $x_0 = 3, y_0 = 1; \quad \omega_1^2 = 5, \omega_2^2 = 11;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\Theta_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\Theta_2\right); \quad y = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\Theta_1 - \sqrt{5}\Theta_2\right).$$

2.61. $L = \frac{1}{2}y\dot{x}^2 + 3(y - 1)\dot{x}\dot{y} + \frac{1}{2}(2x + 1)\dot{y}^2 -$
 $-\left(\frac{x^3}{2} + 25y^2 - 5xy - x - 40y\right).$

Відповідь: $x_0 = 2, y_0 = 1; \quad \omega_1^2 = 5, \omega_2^2 = 11;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{5}\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\Theta_1 - \Theta_2\right).$$

2.62. $L = \frac{3}{2}x\dot{x}^2 + 2(3x - y)\dot{x}\dot{y} + \frac{\dot{y}^2}{y+1} - 3x^3 - 3y^2 + 3xy - 2x + 5y.$

Відповідь: $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = 1; \quad \omega_1^2 = 3, \omega_2^2 = 9;$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 + \Theta_2); \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 - \Theta_2).$$

$$2.63. L = \frac{1}{2x} \dot{x}^2 + 3(5x + y) \dot{x}\dot{y} + \frac{1}{2} \dot{y}^2 - 25x^2 + y^3 + 5xy + 15x - 4y.$$

$$\text{Відповідь: } x_0 = \frac{1}{5}, y_0 = -1; \quad \omega_1^2 = 5, \omega_2^2 = 11;$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \Theta_1 + \Theta_2 \right); \quad y = \frac{1}{\sqrt{6}} (\sqrt{5} \Theta_1 - \Theta_2).$$

2.4. ЗАДАЧІ ДЛЯ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ ДО РОЗДІЛУ 2

2.64. Функція Лагранжа системи з двома ступенями свободи має вигляд:

$$\text{а) } L = \dot{q}^2 + \dot{Q}^2 - 2q^2 - 4Q^2;$$

$$\text{б) } L = 2\dot{q}^2 + \dot{Q}^2 - 4q^2 - 4Q^2;$$

$$\text{в) } L = \dot{q}^2 + \dot{Q}^2 - 2q^2 - 8Q^2.$$

Розглянемо частинку, яка може рухатися в площині XOY так, що її декартові координати збігаються з узагальненими координатами системи. Якою траєкторією буде рухатися ця частинка? Чи буде її рух періодичним? Чи буде періодичним рух її проєкцій?

2.65. Функція Лагранжа системи з двома ступенями свободи має вигляд: $L = \dot{q}^2 + \dot{Q}^2 - 2q^2 - 4Q^2 + \alpha qQ$. При яких значеннях параметра α рух системи буде фінітним? Знайдіть частоти малих коливань системи. Знайдіть нормальні координати для системи.

2.66. На пружині жорсткістю k висить грузик масою m . До нього на пружині жорсткістю $2k$ прикріплений ще один грузик, маса якого $3m$. Знайдіть вільні коливання системи, а також нормальні координати. Запишіть через них функцію Лагранжа.

2.67. На нитці довжиною l висить грузик масою m . До нього на нитці довжиною $4l$ прикріплений ще один грузик, маса якого $2m$. Грузики можуть здійснювати малі коливання, перебуваючи в одній вертикальній площині. Знайдіть вільні коливання системи, а також нормальні координати. Запишіть через них функцію Лагранжа.

2.68. Два грузика масами m і αm можуть рухатися в горизонтальному напрямку між двома стінками. Перший грузик прикріплений до

однієї зі стінок пружиною з жорсткістю k , другий прикріплений до другої стінки пружиною з жорсткістю $2k$. Крім того, обидва грузики з'єднані третьою пружиною з жорсткістю $3k$. Знайдіть коливання системи в граничному випадку $\alpha \ll 1$. Як співвідносяться власні частоти системи? Опишіть якісно рух системи при різних початкових умовах.

2.69. Розв'яжіть попередню задачу для випадку, коли маси грузиків однакові і дорівнюють m , а пружина, що з'єднує грузики, має жорсткість αk .

ДИНАМІКА ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ З БАГАТЬМА СТУПЕНЯМИ СВОБОДИ

Розглянемо узагальнення отриманих вище результатів на випадок лінійних систем з багатьма ступенями свободи.

Нехай потенціальна енергія $U(q_1, q_2, \dots, q_s)$ системи із S ступенями свободи має мінімум у точці $q_i = q_{i0}, i = 1, 2, \dots, S$. Знайдемо наближений вигляд функції Лагранжа, вважаючи малими величинами відхилення від положення рівноваги $x_i = q_i - q_{i0}$ й узагальнені швидкості $\dot{x}_i = \dot{q}_i$. Розкладаючи потенціальну енергію в ряд Тейлора за малими відхиленнями $x_i = q_i - q_{i0}$ з точністю до членів другого порядку:

$$U \approx U_0 + \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_{q_0} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k} \right)_{q_0} x_i x_k.$$

Отримаємо вираз для потенціальної енергії у вигляді квадратичної форми:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s \frac{k_{ik} x_i x_k}{2}, \quad k_{ik} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_k} \right)_{q_0}. \quad (3.1)$$

Потенціальна енергія у (3.1) відраховується від свого мінімального значення U_0 й усі перші похідні $\frac{\partial U}{\partial q_i}$ в точці мінімуму $q_i = q_{i0}, i = 1, 2, \dots, S$

дорівнюють нулю: $\left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_{q_0} = 0$. Оскільки потенціальна енергія є скалярною

величиною, а добуток $x_i x_k$ – симетричний тензор другого рангу, то коефіцієнти k_{ik} в (3.1) також утворюють симетричний тензор другого рангу з $k_{ik} = k_{ki}$. Щоб рівновага була стійкою, має бути виконана нерівність

$$U(x) - U(0) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s \frac{k_{ik} x_i x_k}{2} > 0,$$

тобто квадратична форма (3.1) має бути додатно визначеною. Умова додатної визначеності узагальнює наведені вище умови (див. (2.19)) для системи з двома ступенями свободи. Запишемо коефіцієнти k_{ik} у вигляді квадратної матриці:

$$k_{ik} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2s} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \cdots & k_{3s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{s1} & k_{s2} & k_{s3} & \cdots & k_{ss} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Методом індукції можна зробити висновок, що всі визначники, у яких головна діагональ збігається з головною діагоналлю матриці (3.2)

$$\text{Det}(k_{ik}) = \begin{vmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{i1} & \cdots & k_{ii} \end{vmatrix} > 0; \quad i, k = 1, 2, \dots, S,$$

мають бути додатними, щоб квадратична форма

$$\sum_{i,k=1}^s k_{ik} x_i x_k$$

при всіх x_i, x_k була більше нуля. Доказ цього твердження є в будь-якому курсі вищої алгебри (див., наприклад, [16]).

Залишимо в загальному виразі для кінетичної енергії

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$$

тільки доданки, квадратичні за узагальненими координатами і швидкостями, вважаємо в коефіцієнтах $a_{ik}(q)$, що $q_i = q_{i0}$, і вводим позначення $a_{ik}(q_0) = m_{ik}$ й $x_i = q_i - q_{i0}$. Отримаємо кінетичну енергію у вигляді додатно визначеної квадратичної форми від узагальнених швидкостей:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k. \quad (3.3)$$

$$\sum_{k=1}^s (k_{ik} - \omega^2 m_{ik}) A_k = 0 \quad (3.8)$$

або

$$\begin{pmatrix} \omega^2 m_{11} - k_{11} & \omega^2 m_{12} - k_{12} & \dots & \omega^2 m_{1s} - k_{1s} \\ \omega^2 m_{21} - k_{21} & \omega^2 m_{22} - k_{22} & \dots & \omega^2 m_{2s} - k_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega^2 m_{s1} - k_{s1} & \omega^2 m_{s2} - k_{s2} & \dots & \omega^2 m_{ss} - k_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix} = 0. \quad (3.9)$$

Ця система лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь із постійними коефіцієнтами має нетривіальні (відмінні від нуля) розв'язки, якщо її визначник дорівнює нулю:

$$\text{Det}(k_{ik} - \omega^2 m_{ik}) = 0. \quad (3.10)$$

Рівняння (3.10), яке являє собою рівняння ступеня S відносно ω^2 , називається *характеристичним* і служить для визначення *власних частот* ω . Легко довести (див. [16]), що в загальному випадку додатної визначеності кінетичної та потенціальної енергій всі величини ω_i^2 , $i=1, 2, \dots, S$ є додатними. Сукупність усіх можливих значень частот утворює *спектр власних частот*.

Підставимо знайдені значення частот у систему рівнянь (3.8). Кожній частоті ω_i^2 буде відповідати певне відношення шуканих величин $A_j^{(i)}/A_1^{(i)}$; $i=1, 2, \dots, S$; $j=2, \dots, S$. Тут індекс i відповідає номеру розв'язку рівняння для частот (3.10), а індекс j – номеру коефіцієнта для даного розв'язку ω_i^2 . Ці відношення дорівнюють відношенням алгебраїчних доповнень елементів першого рядка визначника (3.10).

Як і в розглянутому вище випадку системи з двома ступенями свободи, для випадку системи з довільним числом ступенів свободи $S \in S$ часткових розв'язків (нормальних мод), а загальний розв'язок є сумою всіх часткових розв'язків:

$$x_j = \sum_{k=1}^s \zeta_{jk} A_j^{(k)} e^{i\omega_k t}, \quad \zeta_{1k} = 1; \quad j, k = 1, 2, \dots, S. \quad (3.11)$$

Вводимо позначення $\theta_k = A_1^{(k)} e^{i\omega_k t}$; $k=1, 2, \dots, S$ для величин θ_k , які задовольняють рівняння

$$\ddot{\theta}_k + \omega_k^2 \theta_k = 0; \quad k=1, 2, \dots, S, \quad (3.12)$$

які відповідають функціям Лагранжа гармонічних осциляторів

$$L_k = \frac{m_k}{2} (\dot{\theta}_k^2 - \omega_k^2 \theta_k^2); \quad k=1, 2, \dots, S \quad (3.13)$$

і повній функції Лагранжа

$$L = \sum_{k=1}^S L_k = \sum_{k=1}^S \frac{m_k}{2} (\dot{\theta}_k^2 - \omega_k^2 \theta_k^2). \quad (3.14)$$

Тут m_{ik} – додатні сталі. Таким чином, у змінних θ_k задача про зв'язані коливання з багатьма ступенями свободи звелася до задачі про незалежні коливання ефективних лінійних гармонічних осциляторів, число яких дорівнює числу ступенів свободи даної коливальної системи. Кожний гармонічний осцилятор описується відповідною координатою θ_k , яка називається нормальною координатою. Отже, кожна узагальнена координата представляється як сума S нормальних координат, які змінюються за законом гармонічних коливань та є незалежними один від одного. Зазвичай частоти коливань є непорівнянними. Тоді сума виразів, у які входять непорівнянні частоти, є неперіодичною функцією часу.

У загальному випадку при довільних початкових умовах збуджуються всі нормальні моди. Вони є незалежними один від одного, і енергія кожної моди зберігається, утворюючи систему S незалежних інтегралів руху системи. Врахування ангармонізмів (нелінійності) приводить до взаємодії нормальних мод і перекачуванню енергії між ними. Крім того, у нелінійному випадку, загалом кажучи, не існує ортонормованого базису функцій, аналогічних нормальним коливанням, і відсутній принцип суперпозиції.

Як уже зазначалося в підпункті 2.1.2, зазвичай нормальні координати обирають таким чином, щоб коефіцієнти при квадратах швидкостей у функції Лагранжа дорівнювали $1/2$. Для цього досить визначити нормальні координати рівностями

$$\Theta_k = \sqrt{m_k} \theta_k. \quad (3.15)$$

Тоді функція Лагранжа (3.14) прийме вигляд:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s (\dot{\Theta}_i^2 - \omega_i^2 \Theta_i^2). \quad (3.16)$$

З функції Лагранжа (3.14) або (3.16) відразу видно, що вираз для повної енергії в нормальних координатах приводиться до форми

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s (\dot{\Theta}_i^2 + \omega_i^2 \Theta_i^2), \quad (3.17)$$

оскільки $L = T - U$, а $E = T + U$. Зазначимо, що це справедливо тільки при обраному нами виді лагранжиана. Таким чином, енергії окремих гармонічних осциляторів, що представляються координатами θ_j замінюють енергію зв'язаних коливань (3.5) у координатах x_j .

Завдяки нормальним координатам розгляд задачі про коливання значно спрощується, тому що лінійний гармонічний осцилятор є в багатьох відношеннях однією з найпростіших механічних систем.

Приведення до нормальних координат є необхідним при вивченні коливань багатоатомних молекул, кристалів і в теорії поля. Крім того, нормальні координати є корисними в технічних застосуваннях теорії коливань.

Розглянемо випадок *кратних коренів* характеристичного рівняння.

Введення нормальних координат засноване на приведенні додатно визначених квадратичних форм кінетичної та потенціальної енергій до суми квадратів. Проілюструємо можливість цього, використовуючи геометричні зображення. Додатно визначена квадратична форма в n -мірному просторі узагальнених координат q_1, q_2, \dots, q_n (або узагальнених швидкостей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$) являє собою поверхню другого порядку, а саме еліпсоїд, і тому поворотом координатних осей може бути приведена до осей симетрії, тобто представлена у вигляді суми квадратів. Поворот є лінійним перетворенням координат q_1, q_2, \dots, q_n (при цьому одночасно перетворюються і змінні $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$). У випадку задачі теорії малих коливань одночасно до суми квадратів приводяться дві суттєво додатні квадратичні форми T та U . Привівши лінійним перетворенням (поворотом осей) форму T до суми квадратів, ми, загалом кажучи, не отримаємо форму U у вигляді суми квадратів; однак можна зробити *масштабне* перетворення координат, при якому *еліпсоїд*, відповідний до форми T , перейде в *сферу*. Повороти координатних осей після цього залишать сферу незмінною, а еліпсоїд другої форми приведуть до осей симетрії, які будуть осями симетрії сфери для першої квадратичної форми. Таким

чином, обидві форми T та U будуть одночасно приведені до суми квадратів і функція Лагранжа прийме вигляд (3.14), тобто розпадеться на суму виразів, кожен з яких (див. (3.13)) відповідає одномірному коливанню з однією з частот ω_k . Наявність кратного кореня означає однаковість деяких півосей еліпсоїда, що, однак, ніяк не перешкоджає здійсненню описаного приведення двох форм до суми квадратів.

Це перетворення в інших термінах є еквівалентним приведенню матриці до діагональної форми, виконаному послідовними етапами («поворотами»): спочатку оберненням на нуль усіх елементів 1-го рядка та 1-го стовпця, крім тих, що перебувають на головній діагоналі, потім те ж для 2-го рядка та 2-го стовпця, і т. д. Здійснення цієї операції не залежить від наявності кратного кореня характеристичного рівняння. Для ілюстрації цих положень рекомендуємо розглянути завдання 2.12 з даного посібника, завдання 6.18–6.21, 6.28 і 6.29 з Коткіна, Сербо [15].

3.1. ДОПОВНЕННЯ РОЗДІЛУ 3

3.1. Дослідити малі коливання частинки маси m , на яку діє сила $\vec{F} = (-k_1x, -k_2y, -k_3z)$. Це так званий просторовий осцилятор.

Розв'язок. Якщо на частинку масою m , яка знаходиться в точці з координатами (x, y, z) , діє сила $\vec{F} = (-k_1x, -k_2y, -k_3z)$, її потенціальна енергія дорівнює

$$U = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2), \quad (3.18)$$

а функція Лагранжа має вигляд:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2). \quad (3.19)$$

Рух просторового осцилятора являє собою коливання частинки уздовж координатних осей із частотами

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}; \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k_3}{m}}. \quad (3.20)$$

Нормальні координати визначаються рівностями

$$\theta_1 = \sqrt{m}x; \quad \theta_2 = \sqrt{m}y; \quad \theta_3 = \sqrt{m}z. \quad (3.21)$$

Кінетична енергія в нормальних координатах

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2) \quad (3.22)$$

не залежить від вибору напрямків координатних осей, а потенціальна енергія

$$U = \frac{1}{2}(\omega_1^2 \theta_1^2 + \omega_2^2 \theta_2^2 + \omega_3^2 \theta_3^2) \quad (3.23)$$

являє собою рівняння еліпсоїда, приведенного до головних осей. Якщо всі частоти є різними, напрямки головних осей визначаються однозначно. Якщо ж серед коренів характеристичного рівняння є кратні, то кожній кратній (іноді говорять «виродженій») частоті відповідає стільки нормальних координат, якою є ступінь кратності, але вибір цих нормальних координат є неоднозначним.

Наприклад, при $\omega_1^2 = \omega_2^2$ еліпсоїд (3.23) є еліпсоїдом обертання, і осі θ_1 й θ_2 , що лежать у площині, перпендикулярній осі θ_3 , можуть бути одночасно повернені на довільний кут.

Якщо всі частоти збігаються й еліпсоїд перетворюється на сферу, то довільність у виборі напрямків нормальних координат збільшується, оскільки напрямок осі θ_3 стає також довільним.

Рух просторового осцилятора для випадку $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_3^2$ докладно досліджений у [1, § 23, задача № 3].

3.2. Знайти власні частоти коливань, якщо функція Лагранжа має вигляд:

$$L = \frac{1}{2} \left(\dot{x}^2 + \frac{2}{5} \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) - \frac{1}{2} \left(x^2 + y^2 + \frac{2}{5} yz + z^2 \right).$$

Розв'язок. Записуємо рівняння руху:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{1}{5} \ddot{y} + x = 0; \\ \frac{1}{5} \ddot{x} + \ddot{y} + y + \frac{1}{5} z = 0; \\ \ddot{z} + \frac{1}{5} y + z = 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

Підставляємо часткові розв'язки $x = A_1 e^{i\omega t}$; $y = A_2 e^{i\omega t}$; $z = A_3 e^{i\omega t}$ у (3.24), отримуємо

$$\begin{cases} (1 - \omega^2)A_1 - \frac{1}{5}\omega^2 A_2 = 0; \\ -\frac{1}{5}\omega^2 A_1 + (1 - \omega^2)A_2 + \frac{1}{5}A_3 = 0; \\ \frac{1}{5}A_2 + (1 - \omega^2)A_3 = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Щоб рівняння (3.25) мали відмінні від нуля розв'язки, необхідно

$$\begin{vmatrix} 1 - \omega^2 & -\frac{1}{5}\omega^2 & 0 \\ -\frac{1}{5}\omega^2 & 1 - \omega^2 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & 1 - \omega^2 \end{vmatrix} = (1 - \omega^2) \left(\frac{24}{25}\omega^4 - 2\omega^2 + \frac{24}{25} \right) = 0,$$

звідки $\omega_1^2 = 1$; $\omega_2^2 = \frac{4}{3}$; $\omega_3^2 = \frac{3}{4}$.

3.2. ЗАДАЧІ ДО РОЗДІЛУ 3

3.3. Знайти власні частоти коливань, якщо функція Лагранжа має вигляд:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{y} + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(x^2 + xy + y^2 + 2z^2 + 2yz).$$

Відповідь: $\omega_1^2 = 1$; $\omega_2^2 = \frac{1}{6}(9 + \sqrt{57})$; $\omega_3^2 = \frac{1}{6}(9 - \sqrt{57})$.

3.3. ЗАДАЧІ ДЛЯ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ ДО РОЗДІЛУ 2.2

3.4. Розглянемо приклад, коли деякі з власних частот є виродженими. Три частинки масами m , $2m$ і $3m$ можуть рухатися без тертя по дратовому кільцю. Частинки з'єднані пружинками, намотаними на кільце. Жорсткості пружинок, розташованих напроти першої, другої та третьої частинки,

дорівнюють, відповідно, $6k, 3k$ і $2k$. Знайдіть вільні коливання грузиків і нормальні координати. Знайдіть загальну умову, яку мають задовольняти маси m_1, m_2, m_3 грузиків і жорсткості k_1, k_2, k_3 пружинок, щоб у системі з'явилося виродження частот.

3.5. Аналіз більш складних систем можна проводити, частково вгадуючи нормальні коливання і тим самим ефективно зменшуючи кількість ступенів свободи. При цьому дуже важливим виявляється таке твердження. Якщо l -е нормальне коливання для системи з функцією Лагранжа

$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - k_{ij} x_i x_j)$ має вигляд $x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)} \cos(\omega_l t + \phi_l)$, то вектори

$\vec{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \dots, A_N^{(l)})$ й $\vec{A}^{(s)} = (A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \dots, A_N^{(s)})$, відповідні до різних частот ω_l

і ω_s є перпендикулярними в метриці, обумовленій тензорами m_{ij} або k_{ij} ,

тобто $\sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = 0$. Доведіть це.

Застосуємо це твердження для знаходження коливань системи, що складається з чотирьох частинок масами $m, m, 2m$ і m , які можуть рухатися без тертя по дратовому кільцю. Частинки з'єднані пружинками, намотаними на кільце. Жорсткості пружинок, що з'єднують першу та другу частинки, другу та третю, і т. д., дорівнюють $k, 3k, 3k$ і k відповідно. Вгадайте частину нормальних коливань такої системи. Потім, скориставшись доведеною умовою ортогональності, спростіть рівняння руху і знайдіть інші нормальні коливання.

3.6. Молекулу можна розглядати як сукупність точкових мас (атомів), з'єднаних пружинками (зв'язками). Але на відміну від розглянутих вище прикладів коливання молекул можуть бути двох типів – поздовжні та згинні, обумовлені змінами кутів, що визначають геометрію молекули. Розглянемо триатомну молекулу, що складається з атомів масами $3m, m$ і $2m$, які перебувають на одній прямій так, що відстань між першими двома дорівнює $3l$, а між другим і третім – l . Знайдіть усі коливання молекули. Коливання нульової частоти нас не цікавлять. Як можна виключити їх з розгляду до етапу знаходження власних частот системи?

3.7. Малі зміни параметрів системи приводять найчастіше до малих змін власних частот і нормальних координат. Крім цього «слабкого» ефекту, малі зміни в системі можуть приводити до зняття виродження. Розглянемо систему із задачі 3.4. Нехай маса першої частинки збільшена на εm , $\varepsilon \ll 1$, а жорсткість другої пружинки зменшена на εk . Знайдіть поправки до власних частот системи. Знайдіть нормальні коливання системи. Чи є вони близькими до знайдених у 3.4?

ДИНАМІКА ЛІНІЙНИХ ОДНОМІРНИХ ЛАНЦЮЖКІВ

Частинним, але дуже важливим випадком розглянутих вище лінійних систем з багатьма ступенями свободи є одномірні ланцюжки взаємодіючих частинок. Їх можна розглядати як реальні фізичні об'єкти (полімерні сполуки або ланцюжки атомів на поверхні кристала) або як модель тривимірного кристала в тому випадку, коли збурювання в системі залежать лише від однієї просторової координати. Подібні моделі розглядаються як найпростіші, що дають можливість якісно описати багато динамічних властивостей пружних і магнітовпорядкованих середовищ.

4.1. ОДНОРІДНІ ЛІНІЙНІ ЛАНЦЮЖКИ

Розглянемо найпростіші випадки одномірних ланцюжків частинок, коли допускаються зсуви атомів тільки в одному напрямку. Таку модель називають *скалярною моделлю*. Вона зображена на рис. 4.1.

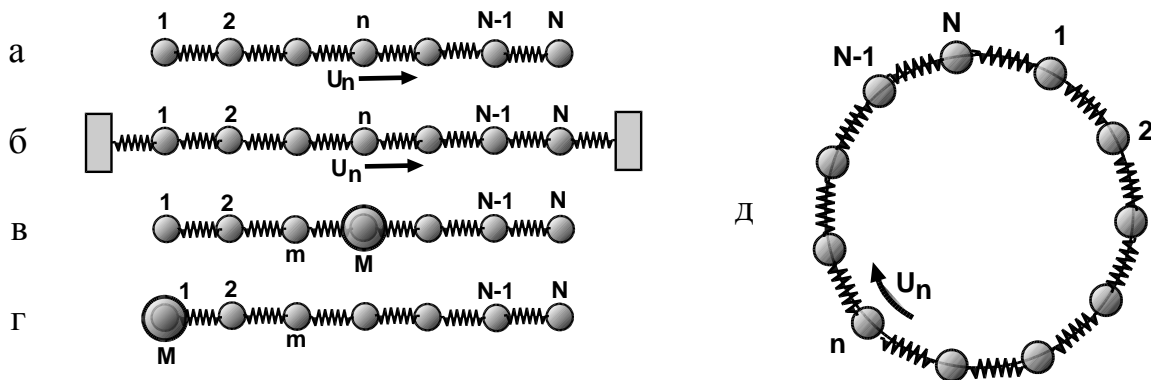


Рис. 4.1

На рис. 4.1а наведено варіант цієї моделі для так званого ланцюжка з вільними границями, на рис. 4.1б – ланцюжка з фіксованими границями, а на рис. 4.1д – ланцюжка з періодичними граничними умовами (так звані умови Борна–Кишені). Моделі на рис. 4.1а, 4.1б є більш складними, ніж модель на рис. 4.1д, оскільки в них граничні частинки

перебувають в інших умовах, ніж внутрішні (у них є тільки один «сусід» або другий «сусід» є фіксованим). Модель з рис. 4.1д є більш симетричною – в ній усі частинки перебувають в однакових умовах. Це, як буде показано нижче, приводить до виродження частот власних коливань. Формально ланцюжок з періодичними граничними умовами можна представити як нескінченний ланцюжок з умовою $u_{N+1} = u_1$. Ці моделі, зазвичай, використовуються для якісного аналізу динаміки кристалічної решітки. Моделі, зображені на рис. 4.1в, 4.1г, описують коливання дефектних атомів у кристалі та динаміку поверхневих коливань.

Для опису динаміки ланцюжків адатомов на поверхні кристалів (мал. 4.2а) зазвичай використовують модифіковану одномірну модель, у якій частинки перебувають у зовнішньому потенціалі підложки. Ця модель ближче до системи двох осциляторів, розглянутих у попередньому розділі, і зображена на рис. 4.2б.

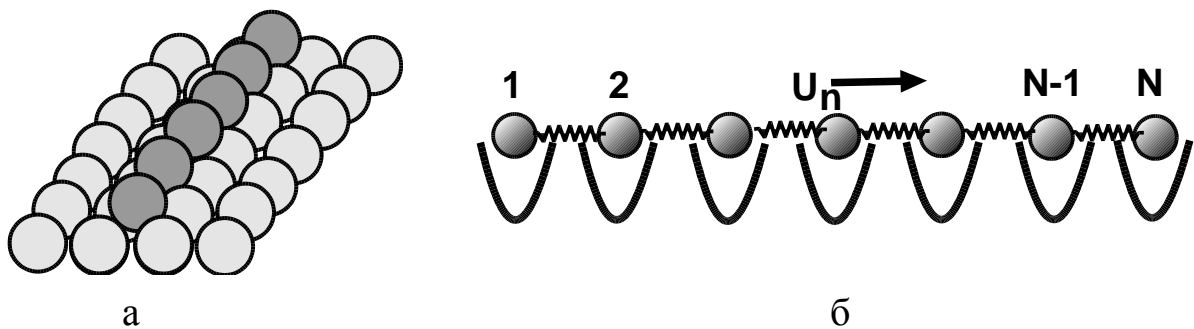


Рис. 4.2

На рис. 4.2 наведено випадок ланцюжка з вільними кінцями. Узагальнення на випадок ланцюжка з нерухомими границями та на випадок ланцюжка з циклічними граничними умовами є очевидним.

Розглянемо спочатку пружний ланцюжок у зовнішньому полі в лінійному наближенні, вважаючи зовнішній потенціал гармонічним і взаємодію частинок – лінійною. Повна енергія такої системи у випадку вільних границь має вигляд:

$$E = \sum_{n=1}^N \left(\frac{m}{2} \dot{u}_n^2 + \frac{k}{2} u_n^2 \right) + \sum_{n=2}^N \frac{\varepsilon}{2} (u_n - u_{n-1})^2, \quad (4.1)$$

де константи k й ε характеризують зовнішній потенціал і межчастинкову взаємодію. Для простоти вважаємо, що взаємодіють тільки найближчі сусіди.

Відповідна функція Лагранжа виглядає так:

$$L = \sum_{n=1}^N \left(\frac{m}{2} \dot{u}_n^2 - \frac{k}{2} u_n^2 \right) - \sum_{n=2}^N \frac{\varepsilon}{2} (u_n - u_{n-1})^2,$$

а рівняння руху –

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_n + k u_n + \varepsilon(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) &= 0; \\ m\ddot{u}_1 + k u_1 + \varepsilon(u_1 - u_2) &= 0; \\ m\ddot{u}_N + k u_N + \varepsilon(u_N - u_{N-1}) &= 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Шукаємо розв’язок у вигляді $u_n = a_n \sin \omega t$ і отримуємо характеристичне рівняння у вигляді детермінанта наступної матриці:

$$\begin{vmatrix} (\omega^2 - \omega_0^2 - \delta) & \delta & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - \delta) \end{vmatrix} = 0,$$

де $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ й $\delta = \varepsilon/m$. У цій матриці відмінними від нуля є тільки елементи на головній діагоналі та на двох лініях, сусідніх із головною діагоналлю. Така матриця називається *якобієвою матрицею*, і вона має велике значення в теорії коливань кристалічної решітки.

У випадку фіксованих границь матриця наведеного детермінанта стає більш симетричною і містить усі однакові члени на головній діагоналі:

$$\begin{vmatrix} (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) \end{vmatrix} = 0.$$

Нарешті, за циклічних граничних умов з'являються додаткові елементи в кутах матриці:

$$\left| \begin{array}{cccccccc} (\omega^2 - \omega_0^2 - \delta) & \delta & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \delta \\ \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta \\ \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - \delta) \end{array} \right| = 0.$$

Очевидно, що при досить великій довжині ланцюжка крайові ефекти, пов'язані з тими чи іншими граничними умовами, стають несуттєвими. Розглянемо останній випадок періодичних граничних умов, як більш простий, докладніше. Рівняння для всіх частинок при цьому є ідентичними і мають вигляд:

$$m\ddot{u}_n + ku_n + \varepsilon(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) = 0. \tag{4.3}$$

Амплітуди розв'язків виду $u_n = a_n \sin \omega t$ задовольняють систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta)a_n + \delta(a_{n+1} + a_{n-1}) &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, N; \\ a_{N+1} &= a_1, \end{aligned} \tag{4.4}$$

розв'язок такої системи слід шукати у вигляді $a_n = a \cos(\kappa nb)$, де b – стала решітки (відстань між частинками). Підстановка цього розв'язку в (4.4) дає співвідношення

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 4\delta \sin^2\left(\frac{\kappa b}{2}\right), \tag{4.5}$$

яке називається *законом дисперсії лінійних хвиль*. Параметр κ у (4.5) називають *хвильовим числом*. Він приймає значення, які визначаються з періодичних граничних умов $a_{N+1} = a_1$, тобто $\cos(\kappa bN + \kappa b) = \cos(\kappa b)$. Звідси випливає, що $\kappa bN = 2\pi S$ із цілочисловими значеннями параметра S . Однак оскільки із закону дисперсії (4.5) випливає, що всі різні значення частот лежать в інтервалі $0 \leq \kappa b \leq \pi$, то $S = 0, 1, 2, \dots, N/2$ (N – парне число).

У задачі 4.1 показано, що в замкненому ланцюжку з трьох частинок нижня частота, відповідна до синфазних коливань, є не виродженою, а наступна частота є двічі виродженою.

У задачі 4.2 для чотирьох частинок показано, що в цьому випадку моди синфазних коливань (нижня) і протифазних коливань (верхня) є не виродженими, а частота «проміжних» мод є двічі виродженою. Аналогічно у замкненому ланцюжку з N частинок спектр залежить від парності числа N . При парному $N = 2p$ нижня синфазна мода (...↑↑↑↑...) відповідає не виродженій частоті $\omega = \omega_0$, а верхня протифазна мода (...↑↓↑↓...) – не виродженій максимальній частоті, спектр якої – $\omega_m = \sqrt{\omega_0^2 + 4\delta}$. Усі інші $N/2 - 1$ частоти є двічі виродженими. У випадку непарного N верхня протифазна мода (...↑↓↑↓...) відсутня, а інші, крім синфазної, є двічі виродженими. Для вироджених станів кожному значенню хвильового числа k відповідають два ортогональні розв'язки: $a_n = a \cos(kbn)$ і $a_n = a \sin(kbn)$. Цій обставині можна додати наступну інтерпретацію. Якщо розглядати не розв'язки типу стоячої хвилі $x_n = a \sin(\omega t) \cos(kbn)$, а розв'язки у вигляді біжучих хвиль $x_n = a \sin(kbn - \omega t)$, $x_n = a \sin(kbn - \omega t)$, то двом модам з однаковими частотами відповідають дві хвилі, що біжать у замкненому кільці в протилежних напрямках.

Частоти спектра лінійних коливань зображені в лівій частині рис. 4.3. Зручно «розтягти» цей малюнок, зображуючи уздовж осі абсцис значення хвильового числа або цілочислові значення параметра S . При цьому ми отримаємо стандартний графік закону дисперсії як залежності частоти від хвильового числа.

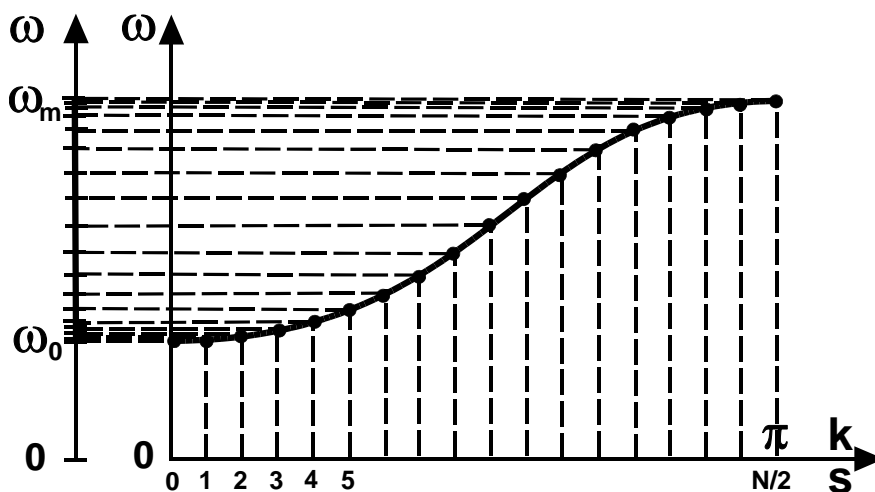


Рис 4.3

З ростом числа частинок у ланцюжку N зростає кількість значень хвильового числа $0 \leq kb \leq N/2$, але мінімальна та максимальна частоти не змінюються. Спектр стає все більш «густим» і в граничному випадку $N \rightarrow \infty$ – суцільним. Оскільки є мінімальна частота спектра та щілина заборонених частот $0 \leq \omega \leq \omega_0$, то розглянутий спектр називається *щілинним*, або *активаційним*.

З рис. 4.3 видно, що частоти нормальних мод згущаються при наближенні до країв спектра: мінімальної частоти ω_0 і максимальної частоти ω_m . Для характеристики розподілу власних частот вводиться величина *густини станів*, тобто числа коливань Δn в інтервалі частот $\Delta \omega$. У граничному випадку великих значень N і суцільного спектра ця величина $g(\omega)$ вводиться в такий спосіб:

$$dn = Ng(\omega)d\omega. \quad (4.6)$$

Очевидно, що $g(\omega) = \frac{1}{N} \sum_s \delta(\omega - \omega(\kappa_s))$, де $\omega(\kappa_s)$ – закон дисперсії.

Враховуючи, що $\kappa = 2\pi S/N$, переходячи від підсумовування по S до інтегрування по κ та скориставшись властивостями δ -функції, отримуємо

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|d\omega(\kappa)/d\kappa|}. \quad (4.7)$$

Тут береться модуль величини $d\omega/d\kappa$, оскільки густина станів за визначенням – величина додатна. Сама величина $d\omega/d\kappa$ називається *груповою швидкістю*. З формули (4.5) видно, що на краях спектра групова швидкість перетворюється на нуль (дійсно, синфазній й антифазній модам відповідають стоячі коливання), а густина станів має особливості (див. рис. 4.4):

$$g(\omega \rightarrow \omega_0) \rightarrow \frac{\sqrt{\omega_0}}{2\pi\sqrt{2\delta}} \frac{1}{\sqrt{\omega - \omega_0}}, \quad g(\omega \rightarrow \omega_m) \rightarrow \frac{\sqrt{\omega_0}}{2\pi\sqrt{2\delta}} \frac{1}{\sqrt{\omega_m - \omega}}.$$

Іноді розглядають розподіл густини різних станів не за частотами, а за квадратами частот $\varepsilon = \omega^2$. Ця величина вводиться аналогічно (4.7):

$$G(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|d\omega^2(\kappa)/d\kappa|}. \quad (4.8)$$

і також має особливості на краях спектра.

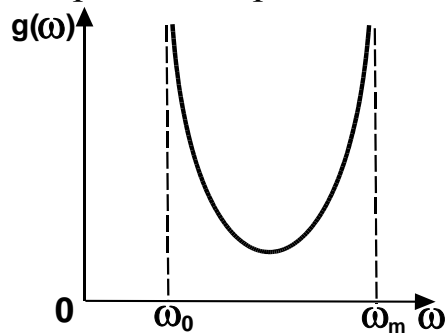


Рис. 4.4

Зазначені особливості відіграють важливу роль у фізиці. При дослідженні властивостей низьковимірних речовин (квазіодновимірних і квазідвувимірних) в експериментах з поглинання енергії зовнішніх полів головну роль відіграють саме коливання з частотами, за яких густина станів є максимальною.

Розглянемо тепер випадок замкненого ланцюжка у відсутності зовнішнього потенціалу, зображений на рис. 4.1д. Він впливає з розглянутого вище прикладу при $k = 0$. При цьому закон дисперсії (4.5) спроститься:

$$\omega = 2\sqrt{\delta} \sin(\kappa b/2). \quad (4.9)$$

При цьому систематика станів збережеться, але значенню $\kappa = 0$ тепер буде відповідати нульова частота. Цю моду звичайно називають *зсувною модою*: оскільки зовнішній потенціал відсутній, то всі частинки як ціле можуть бути зміщені на довільну відстань. Спектр стає безщільним. Спектр, у якого в межі $\kappa \rightarrow 0$ частота $\omega \rightarrow 0$, звичайно називають голдстоуновським. У даному окремому випадку в межі $\omega \rightarrow 0$ групова швидкість дорівнює

$$V = \frac{d\omega}{dk} = b\sqrt{\delta} = b\sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}. \quad (4.10)$$

Ця величина називається *швидкістю звуку* в даній системі, а спектр – *звуковим*. Зазначимо, що в цій межі групова швидкість збігається з іншою характеристикою розмірності швидкості – фазовою швидкістю:

$$v = \frac{\omega}{\kappa} = b\sqrt{\delta}. \quad (4.11)$$

У відсутності зовнішнього потенціалу графік закону дисперсії виглядає так (ліворуч на рис. 4.5).

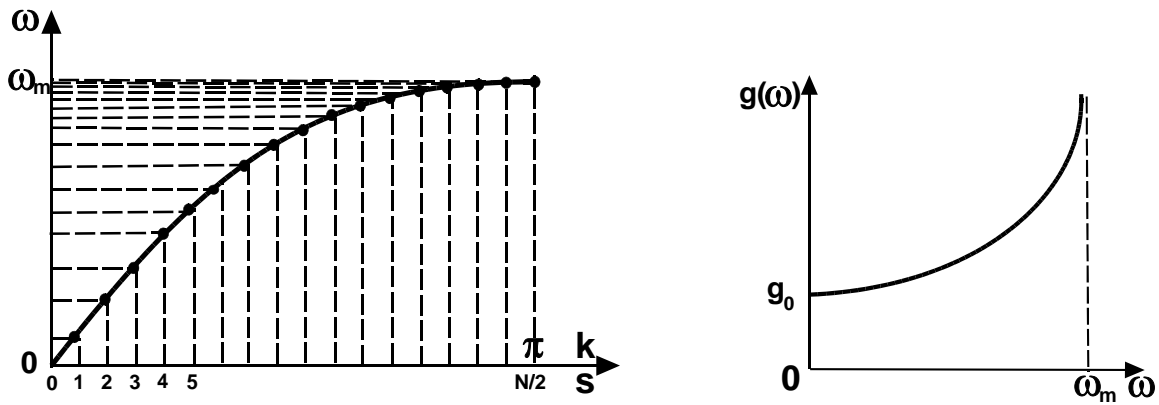


Рис. 4.5

Тут же праворуч на рис. 4.5 зображена залежність густини станів від частоти $g = 1 / \left(\pi \sqrt{\omega_m^2 - \omega^2} \right)$, де максимальна частота спектра $\omega_m = 2b\sqrt{\delta}$.

4.2. ЛІНІЙНІ ЛАНЦЮЖКИ З ДЕФЕКТАМИ. ЛОКАЛЬНІ КОЛИВАННЯ

Дотепер ми розглядали однорідні ланцюжки, у яких усі частинки були однаковими (з однаковими масами m й однаковими характеристиками зовнішнього поля k). Параметри зв'язків між частинками ε також передбачалися ідентичними. Однак реальні кристали містять дефекти різного типу. Приклади таких точкових дефектів наведені на рис. 4.1в, 4.1г (дефект усередині ланцюжка й поверхневий дефект). Наявність дефектної частинки суттєво змінює класифікацію власних частот системи і приводить до виникнення так званих локальних частот, що мають важливе значення для фізики кристалічної решітки. Розглянемо це питання докладніше на прикладі ланцюжка з активаційним спектром (із зовнішнім потенціалом для частинок) і з періодичними граничними умовами (див. рис. 4.6).

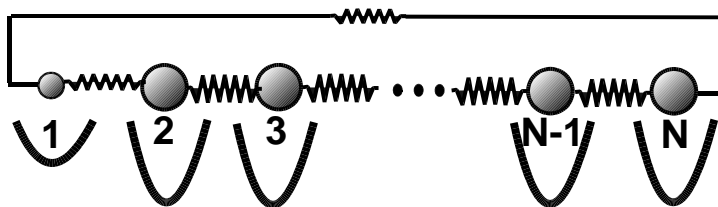


Рис. 4.6

У загальному випадку ми вважаємо, що у частинки з номером 1 змінені маса $m \rightarrow M$, зовнішній потенціал $k \rightarrow K$ і зв'язки із сусідніми

частинками $\varepsilon \rightarrow E$. При цьому матриця, відповідна до характеристичного рівняння, зміниться в такий спосіб:

$$\begin{vmatrix} (\omega^2 - \Omega_0^2 - \Delta) & \Delta & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \Delta \\ \Delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta) & \delta \\ \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \delta & (\omega^2 - \omega_0^2 - \delta) \end{vmatrix} = 0,$$

де $\Omega^2 = K/M$ і $\Delta = E/M$. Через дефект зникає трансляційна інваріантність системи (при зміщенні на одну межчастинкову відстань) і виродження частот спектра. Задача стає суттєво складнішою. Тому розглянемо її приблизно в окремому випадку, коли змінюється тільки маса однієї частинки (випадок *ізотопичної домішки*). При цьому в системі рівнянь (4.2) змінюється тільки рівняння для частинки з номером $n = 1$:

$$M \ddot{u}_1 + k u_1 + \varepsilon (2u_1 - u_2 - u_N) = 0, \quad n = 1; \quad (4.12)$$

$$m \ddot{u}_n + k u_n + \varepsilon (2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) = 0, \quad n \neq 1. \quad (4.13)$$

Розглянемо дві перші нормальні моди з частотами поблизу нижнього краю спектра з частотами ω_1 й ω_2 у випадку важкого ізотопичного дефекту з $M > m$. Розподіли зсувів частинок в цих двох модах за відсутності дефекту зображені на рис. 4.7а, а в дефектному ланцюжку – на рис. 4.7б. Очевидно, що важка домішка буде коливатися з малою амплітудою й у граничному випадку $M \rightarrow \infty$ взагалі залишається нерухливою.

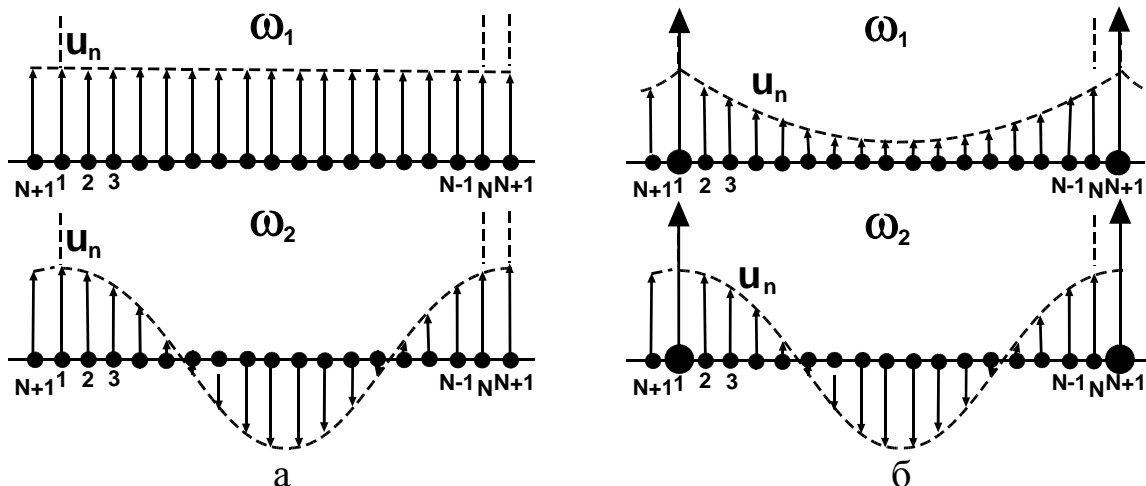


Рис. 4.7

Розглянемо найбільш низькочастотне коливання, в яке трансформуються однорідні коливання ідеального ланцюжка без дефекту.

З рис. 4.7 очевидно, що розв'язок рівнянь (4.12) для всіх частинок, крім дефектної, слід шукати у вигляді коливання, локалізованого поблизу дефекту, тобто у вигляді так званого локального коливання. Воно має вигляд:

$$u_n = \sin \omega t \operatorname{ch} \left(\eta b \left(n - \frac{N}{2} - 1 \right) \right), \quad (4.14)$$

що дає зв'язок частоти з параметром η :

$$m\omega^2 = k - 4\varepsilon \operatorname{sh}^2 \frac{\eta b}{2}. \quad (4.15)$$

Підставляючи (4.14) у (4.12), знаходимо друге рівняння:

$$M\omega^2 = k - 4\varepsilon \operatorname{sh}^2 \frac{\eta b}{2} + 4\varepsilon \operatorname{sh} \frac{\eta b}{2} \operatorname{ch} \frac{\eta b}{2}. \quad (4.16)$$

З порівняння цих рівнянь бачимо, що при $M \rightarrow m$ параметр $\eta \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \omega_0 = \sqrt{k/m}$ і з (4.15) і (4.16) $\eta b \approx (M - m\omega_0^2)/(2\varepsilon)$. При цьому з (4.15)

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 \left(1 - \frac{k}{4\varepsilon} \left(\frac{M - m}{m} \right)^2 \right). \quad (4.17)$$

В іншому граничному випадку $M \rightarrow \infty$ з (4.16) випливає, що $\omega \rightarrow 0$. При цьому з (4.16) маємо $\operatorname{sh}^2(\eta b/2) \approx k/4\varepsilon$ і з (4.17) –

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 \sqrt{1 + \frac{4\varepsilon}{k} \frac{m}{M}}. \quad (4.18)$$

Графік залежності частоти локального коливання від величини дефекту маси $\Delta = (M - m)/m$ наведено на рис. 4.8, де сірим кольором виділена зона нормальних мод коливань. Оскільки загальна кількість нормальних мод дорівнює числу ступенів свободи і не змінюється при зміні маси однієї частинки, то в цій зоні знаходиться $N - 1$ стан. (Одна нормальна мода перетворилася на локальне коливання).

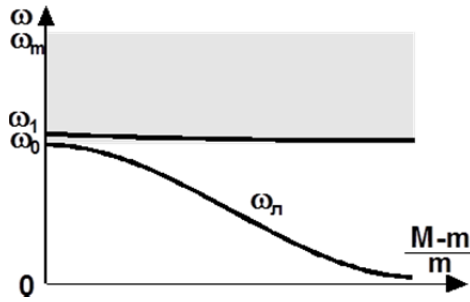


Рис. 4.8

Зазначимо, що з (4.16) випливає, що

$$m\omega_0^2 - M\omega^2 = 4\varepsilon \operatorname{sh} \frac{\eta b}{2} \exp\left(-\frac{\eta b}{2}\right) > 0,$$

а з (4.13) випливає зв'язок амплітуд домішкової частинки та її сусідів:

$$a_1 = a_2 \frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + (m\omega_0^2 - M\omega^2)}. \quad (4.19)$$

Отже, у локальному коливанні в нижній границі спектра амплітуда важкої домішки більше амплітуди сусідніх частинок. (Порівняйте цей результат з розв'язком задачі 2.1 про коливання двох зв'язаних осциляторів з різними масами).

Розглянемо коливальну моду, наступну за частотою за локальним коливанням. Для неї розв'язок рівняння (4.13) треба вибрати у вигляді

$$u_n = \sin \omega t \cos\left(\kappa b \left(n - \frac{N}{2} - 1\right)\right). \quad (4.20)$$

При підстановці цього розв'язку в (4.12) і (4.13) отримаємо систему рівнянь:

$$m\omega^2 = k + 4\varepsilon \sin^2 \frac{\kappa b}{2}; \quad (4.21)$$

$$M\omega^2 = k + 4\varepsilon \sin^2 \frac{\kappa b}{2} - 4\varepsilon \sin \frac{\kappa b}{2} \cos \frac{\kappa b}{2} \operatorname{tg} \frac{\kappa b N}{2}. \quad (4.22)$$

У випадку однорідного ланцюжка параметр κ приймав значення $\kappa b = 2\pi s/N$. У ланцюжку з домішкою першій після локального коливання моді відповідає стан з $\kappa b \approx 2\pi/N \ll 1$. З (4.21), (4.22) випливає, що для першої нелокальної моди $\kappa b = 2\pi/N$ при $M - m = 0$ і $\kappa b = \pi/N$ при

$(M - m)/m \rightarrow \infty$. При цьому частота міняється від $\omega^2 \approx \omega_0^2 + 4\varepsilon\pi^2/mN^2$ до $\omega^2 \approx \omega_0^2 + \varepsilon\pi^2/mN^2$. Отже, у випадку великих N частота практично не змінюється (див. рис. 4.8).

Таким чином, для досить довгих ланцюжків істотна зміна відбувається лише з граничною модою, а однорідні коливання перетворюються на локальні, дослідженню яких і приділяється основна увага.

З розв'язку (4.14) для локальної моди випливає, що область локалізації коливання має порядок величини $l \sim 1/\kappa$ і ця величина є набагато більшою, ніж міжатомна відстань при $(M - m)\omega_0^2/(2\varepsilon) \ll 1$. У цьому граничному випадку можна скористатися так званим *довгохвильовим наближенням*. У цьому наближенні, уводячи замість дискретного номера частинок n безперервну координату x і розкладаючи зсуви $u_{n\pm 1} = u(bn \pm b)$, де b – міжатомна відстань, у ряд Тейлора, другі різниці в межчастинковій взаємодії $\varepsilon(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1})$ можна замінити на другі часткові похідні

$$\varepsilon b^2 u_{xx}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

При цьому система звичайних диференціальних рівнянь для системи без дефектів (4.13) перетвориться на рівняння в часткових похідних

$$m u_{tt} - \varepsilon b^2 u_{xx} + k u(x, t) = 0, \quad (4.23)$$

яке називається рівнянням Клейна – Гордона. Спектр збуджень типу $u = a \sin \omega t \cos kx$ для цього рівняння має вигляд: $\omega^2 = \omega_0^2 + (\varepsilon/m)b^2 \kappa^2$ і збігається з (4.21) для малих $b\kappa \ll 1$. Щоб описати дефект мас у довгохвильовому граничному випадку (й у випадку нескінченного ланцюжка), досить розглянути таке рівняння:

$$m u_{tt} - \varepsilon a^2 u_{xx} + k u(x, t) = (m - M) u_{tt} \delta(x/b), \quad (4.24)$$

де $\delta(x/b)$ – δ -функція, відповідна до дефекту в точці $x=0$ (константа b введена в δ -функцію з міркувань розмірності). Для монохроматичних коливань (4.24) зводиться до однорідного рівняння

$$\left(\frac{\varepsilon b^2}{m} \right) u_{xx} - (\omega_0^2 - \omega^2) u = 0 \quad (4.25)$$

з граничною умовою в точці розташування дефекту:

$$2(\varepsilon / m) b u_x \Big|_0 = -\frac{(M - m)}{m} \omega^2 u(0). \quad (4.26)$$

Підставляючи в граничну умову (4.26) розв'язок (4.25) $u(x > 0) = \sin \omega t \exp(-x \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} / b \sqrt{\varepsilon / m})$, знаходимо частоту локального коливання:

$$\omega_n^2 = \frac{2\varepsilon}{m\Delta^2} \left(-1 + \sqrt{1 + m\omega_0^2 \Delta^2 / \varepsilon} \right). \quad (4.27)$$

При малому дефекті маси $\Delta \ll \varepsilon / k$ формула (4.27) переходить в отриманий раніше вираз (4.17) для дискретного ланцюжка.

4.3. БАГАТОАТОМНІ ЛІНІЙНІ ЛАНЦЮЖКИ

Як ще один важливий приклад динаміки пружних ланцюжків розглянемо коливання ланцюжка, у якому чергуються маси частинок. Ця система моделює кристал із двоатомною елементарною ґраткою і зображена на рис. 4.9.

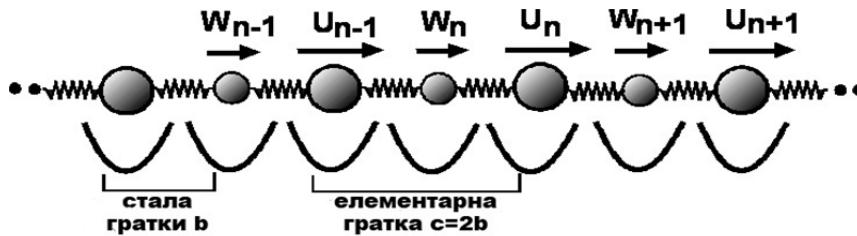


Рис. 4.9

Система рівнянь, що описують дану модель, має такий вигляд:

$$M \ddot{u}_n + k u_n + \varepsilon (2u_n - w_{n+1} - w_n) = 0; \quad (4.28)$$

$$m \ddot{w}_n + k w_n + \varepsilon (2w_n - u_n - u_{n-1}) = 0. \quad (4.29)$$

Для амплітуд стаціонарних коливань $u_n = U_n \sin \omega t$, $w_n = W_n \sin \omega t$ рівняння (4.28), (4.29) легко зводяться до рівнянь тільки для однієї з підрешіток:

$$\left[(M \omega^2 - k - 2\varepsilon)(m \omega^2 - k - 2\varepsilon) - 2\varepsilon^2 \right] U_n - \varepsilon^2 (U_{n+1} + U_{n-1}) = 0. \quad (4.30)$$

З (4.29) також випливає співвідношення між амплітудами коливань частинок з різних підрешіток:

$$W_n = -\frac{\varepsilon}{m\omega^2 - k - 2\varepsilon}(U_n + U_{n-1}). \quad (4.31)$$

Підставляючи в (4.31) розв'язок у вигляді $U_n = A \cos \kappa n$, отримуємо спектр можливих коливань у системі

$$\omega^2 = \frac{(k + 2\varepsilon)}{2Mm} \left((M + m) \pm \sqrt{(M - m)^2 + 4Mm \left(\frac{2\varepsilon}{2\varepsilon + k} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\kappa c}{2} \right)} \right). \quad (4.32)$$

Він складається з двох гілок (двох зон коливань), розділених щільною заборонених частот, і зображений на рис. 4.10.

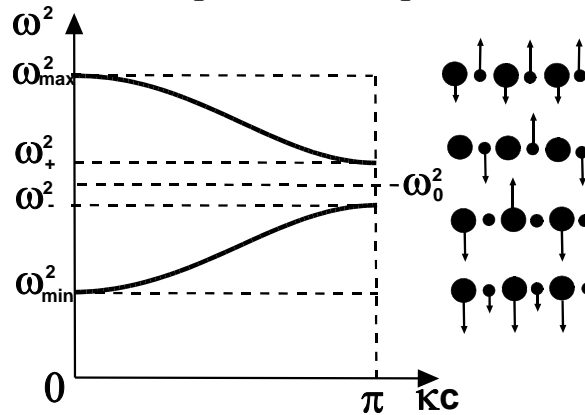


Рис. 4.10

Границям щілини відповідають частоти

$$\omega_+^2 = \frac{(k + 2\varepsilon)}{m}; \quad \omega_-^2 = \frac{(k + 2\varepsilon)}{M}. \quad (4.33)$$

На верхній границі $\omega = \omega_+$ важкі частинки є нерухливими, а легкі коливаються у протифазі. На нижній границі $\omega = \omega_-$ легкі частинки є нерухливими, а важкі коливаються в протифазі. Нижній границі всього спектра $\omega = \omega_{\min}$ відповідають синфазні коливання всіх частинок з більшою амплітудою у важких, а верхній границі $\omega = \omega_{\max}$ – протифазні коливання з переважним коливанням легких частинок. Залежності $\omega^2(\kappa)$ для двох гілок спектра симетричні щодо середини щілини $\omega_0^2 = (k + 2\varepsilon)(M + m)/2Mm$. Ця симетрія зникає в формулах залежності частоти від хвильового числа

$\omega = \omega(\kappa)$. Це добре видно в межі вільного ланцюжка без зовнішнього потенціалу $k = 0$, для якого залежність (4.32) модифікується в такий спосіб:

$$\omega^2 = \frac{\varepsilon}{Mm} \left((M + m) \pm \sqrt{(M + m)^2 - 4Mm \sin^2 \left(\frac{\kappa c}{2} \right)} \right). \quad (4.34)$$

Верхня гілка спектра якісно не змінюється, але нижня гілка в граничному випадку $\kappa \rightarrow 0$ має наступну асимптотику:

$$\omega \approx \sqrt{\frac{\varepsilon}{2(M + m)}} \kappa c. \quad (4.35)$$

Зазначимо, що при визначенні хвильового числа κ ми враховували, що елементарна ґратка складається з двох атомів і її розмір становить $c = 2b$, а не b , як в одноатомному ланцюжку. Закон дисперсії коливань ланцюжка без зовнішнього потенціалу наведено на рис. 4.11. Тут же наведено розподіл густини коливань для нього. Нижня гілка спектра відповідає так званим *акустичним коливанням* і називається *акустичною*. Верхня гілка називається *оптичною* і відповідає так званим *оптичним коливанням*, хоча йдеться про коливання решітки в пружних середовищах. Така назва іноді вводить в оману. Пояснимо її походження. Справа в тому, що в оптичних модах коливань атоми коливаються в протифазі.

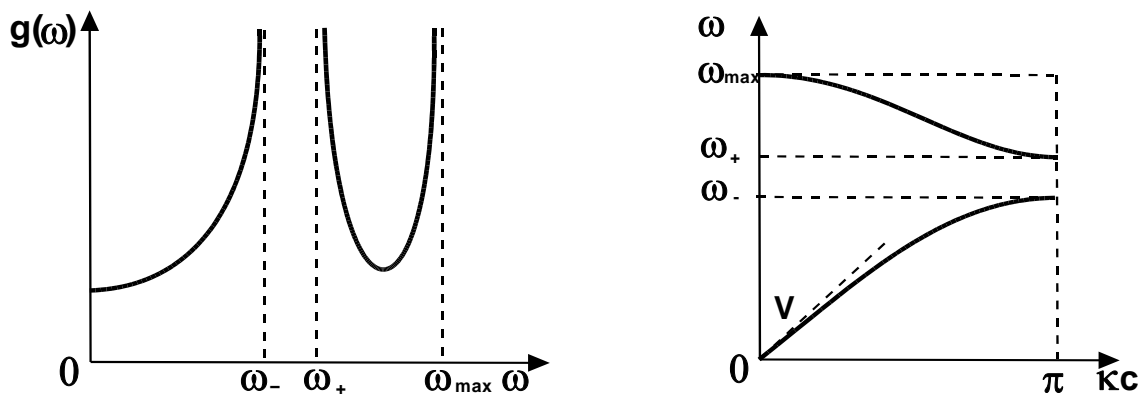


Рис. 4.11

Якщо атоми несуть заряд, то такі коливання відповідають змінному електричному дипольному моменту, здатному випромінювати електромагнітну хвилю в оптичному діапазоні частот.

Для порівняння спектра частот, зображеного на рис. 4.11, з відповідним законом дисперсії коливань одноатомного ланцюжка, який наведено на рис. 4.5, слід зробити наступне зауваження. На рис. 4.12а ми повторили

спектр із рис. 4.11. На рис. 4.12б наведено той же спектр у так званій схемі розширених зон. На рис. 4.12в у вигляді тонкої лінії на той же спектр накладена крива з рис. 4.5, у яку спектр переходить у випадку $M \rightarrow m$. Перехід від міжатомної відстані b до розміру елементарної ґратки приводить до зміни масштабу по осі абсцис.

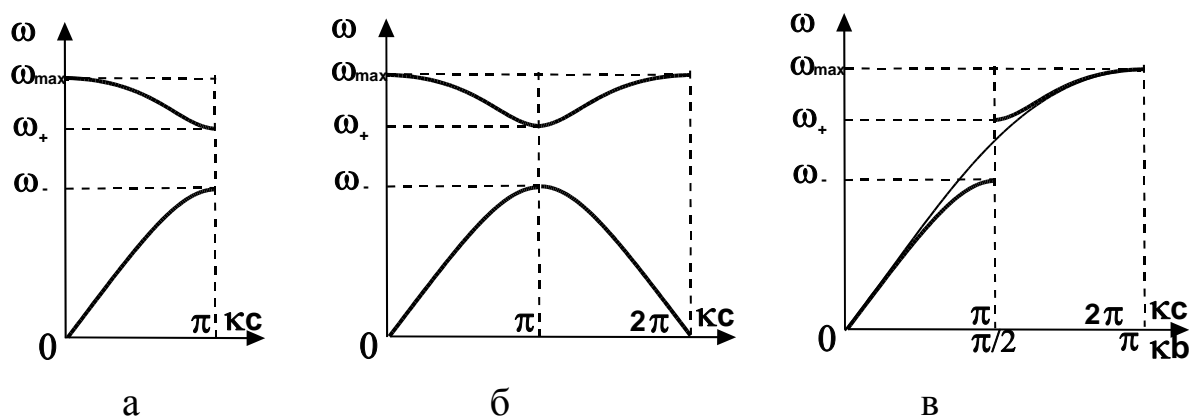


Рис. 4.12

На закінчення зазначимо, що на границях зон спектра, які є найбільш важливими з фізичної точки зору, всі різні типи коливань мають період, що дорівнює 4 міжатомним відстаням. Тому для знаходження граничних частот спектра досить розв'язати більш просту задачу про коливання системи з чотирьох частинок з періодичними граничними умовами (див. завдання цього розділу).

4.4. ДОПОВНЕННЯ ДО РОЗДІЛУ 4

4.1. Знайти спектр коливань триатомного ланцюжка в скалярній моделі з різними граничними умовами.

Розглянуті системи зображені на рис. 4.13 для періодичних, вільних і фіксованих граничних умов, де x_i – зсуви частинок з положення рівноваги в мінімумах потенційної енергії.

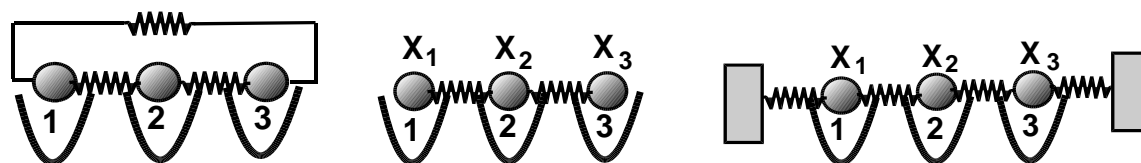


Рис. 4.13

Розв'язок. У випадку періодичних граничних умов рівняння (4.2) приймають вигляд (див. формулу (4.3)):

$$m\ddot{u}_n + k u_n + \varepsilon(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) = 0$$

і при підстановці $u_n = a_n \sin \omega t$ зводяться до системи алгебраїчних рівнянь (див. формулу (4.4)):

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta)a_n + \delta(a_{n+1} + a_{n-1}) &= 0; \quad n = 1, 2, 3; \\ a_4 &= a_1. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Легко показати, що характеристичне рівняння має вигляд:

$$(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_0^2 - 3\delta)^2 = 0. \quad (4.37)$$

У загальному випадку система з трьома ступенями свободи характеризується трьома нормальними коливаннями. Однак у цьому випадку через симетрію задачі одна з частот є двічі виродженою. Одна нормальна мода відповідає синфазним коливанням частинок:

$$\omega_1 = \omega_0; \quad a_1 = a_2 = a_3; \quad \uparrow \uparrow \uparrow. \quad (4.38)$$

(Тут стрілки однакової довжини відповідають однаковим амплітудам коливань частинок). Дві інші моди відповідають одній і тій самій частоті $\omega^2 = \omega_0^2 + 3\delta$. Вибір таких мод є неоднозначним. З рівнянь (4.36) випливає співвідношення $a_n + a_{n+1} + a_{n-1} = 0$, тобто $a_3 = -a_1 - a_2$. Воно автоматично забезпечує ортогональність цих мод моді синфазних коливань. Але додатково необхідно забезпечити ортогональність коливань із виродженими частотами між собою. Якщо позначити амплітуди коливань у двох модах як $(b, c, -b-c)$ і $(d, f, -d-f)$, то виникає умова $2bd + 2cf + bf + cd = 0$. Оскільки амплітуди кожної моди є довільними, то для визначеності покладемо $b = d = 1$ й отримаємо $f = -(2+c)/(1+2c)$. При цьому зберігається довільність у виборі параметра c . Якщо $c = 1$, то розподіл коливань у модах $(1, 0, 1)$ і $(1, -2, 1)$ виглядає так:

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 3\delta}; \quad a_1 = -a_3; \quad a_2 = 0; \quad \uparrow \bullet \uparrow. \quad (4.39)$$

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 + 3\delta}; \quad a_1 = a_3 = -a_2/2; \quad \uparrow \downarrow \uparrow. \quad (4.40)$$

(Точка у (4.39) відповідає нульовій амплітуді). З рисунків видно, що всі три моди ортогональні одна одній, тобто $a_1^{(i)}a_1^{(j)} + a_2^{(i)}a_2^{(j)} + a_3^{(i)}a_3^{(j)} = 0$.

Розглянемо другий випадок вільних границь, для яких рівняння (4.36) модернізуються в такий спосіб:

$$\begin{cases} (\omega^2 - \omega_0^2 - \delta)a_1 + \delta a_2 = 0; \\ (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta)a_2 + \delta(a_1 + a_3) = 0; \\ (\omega^2 - \omega_0^2 - \delta)a_3 + \delta a_2 = 0. \end{cases} \quad (4.41)$$

Характеристичне рівняння для визначення спектра частот має вигляд:

$$(\omega^2 - \omega_0^2 - \delta)(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_0^2 - 3\delta) = 0,$$

а спектр і нормальні моди виглядають так:

$$\begin{array}{ll} \omega_1 = \omega_0; & a_1 = a_2 = a_3; & \uparrow \uparrow \uparrow; \\ \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \delta}; & a_1 = -a_3; \quad a_2 = 0; & \uparrow \cdot \uparrow; \\ \omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 + 3\delta}; & a_1 = a_3 = -a_2/2; & \uparrow \downarrow \uparrow. \end{array}$$

Нарешті, у випадку фіксованих границь рівняння для амплітуд коливань виглядають так:

$$\begin{cases} (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta)a_1 + \delta a_2 = 0; \\ (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta)a_2 + \delta(a_1 + a_3) = 0; \\ (\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta)a_3 + \delta a_2 = 0. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$(\omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta)(\omega^2 - \omega_0^2 - (2 + \sqrt{2})\delta)(\omega^2 - \omega_0^2 - (2 - \sqrt{2})\delta) = 0,$$

а нормальні моди і їх частоти

$$\begin{array}{ll} \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + (2 - \sqrt{2})\delta}; & a_1 = a_3 = a_2/\sqrt{2}; & \uparrow \uparrow \uparrow; \\ \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\delta}; & a_1 = -a_3; \quad a_2 = 0; & \uparrow \cdot \uparrow; \end{array}$$

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 + (2 + \sqrt{2})\delta}; \quad a_1 = a_3 = -a_2/2; \quad \uparrow \downarrow \uparrow.$$

З отриманих результатів видно, що в усіх трьох випадках симетрія трьох нормальних мод є однаковою, але спектр частот є різним, що пов'язано з істотним впливом граничних умов у випадку коротких ланцюжків.

4.2. Знайти спектр коливань чотириатомного ланцюжка в скалярній моделі з періодичними граничними умовами за наявності зовнішнього потенціалу та за його відсутності (див. рис. 4.14).

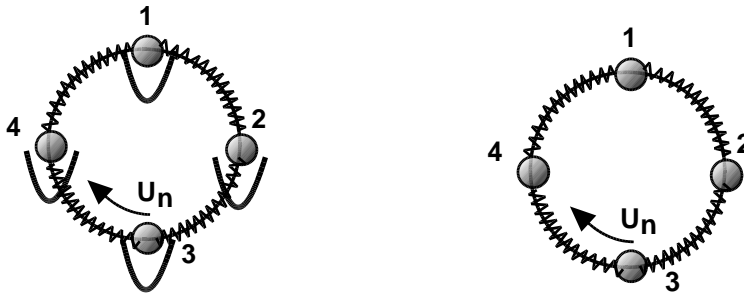


Рис. 4.14

Розв'язок. Система рівнянь для коливання 4 частинок у зовнішньому потенціалі наведена в (4.13):

$$m\ddot{u}_n + k u_n + \varepsilon(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) = 0$$

з додатковою умовою $u_1 = u_5$. Характеристичне рівняння для знаходження частот має вигляд:

$$\det \begin{vmatrix} b & c & 0 & c \\ c & b & c & 0 \\ 0 & c & b & c \\ c & 0 & c & b \end{vmatrix} = b^2(b - 2c)(b + 2c) = 0,$$

де $b = \omega^2 - \omega_0^2 - 2\delta$ й $c = 2\delta$ з $\delta = \varepsilon/m$. Таким чином, спектр коливань складається з трьох частот, одна з яких є двічі виродженою. Мінімальна частота $\omega_{\min}^2 = \omega_0^2$ відповідає синфазним коливанням. Максимальна частота $\omega_{\max}^2 = \omega_0^2 + 4\varepsilon/m$ відповідає протифазним коливанням частинок. Крім цього, є двічі вироджена частота $\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon/m$. З динамічних рівнянь

впливає, що у відповідних розв'язках $a_1 = -a_3$ і $a_2 = -a_4$, що забезпечує ортогональність двом іншим модам. Як ортогональні між собою моди можна вибрати стани з $a_2 = a_4 = 0$ і $a_1 = a_3 = 0$. Якісний розподіл коливань у модах зображений нижче:

$$\begin{array}{lll}
 \omega_{\min} = \omega_0; & a_1 = a_2 = a_3 = a_4; & \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow; \\
 \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\delta}; & a_1 = -a_3, a_2 = a_4 = 0; & \uparrow \cdot \downarrow \cdot; \\
 \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\delta}; & a_1 = a_3 = 0, a_2 = -a_4 = 0; & \cdot \uparrow \cdot \uparrow; \\
 \omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 + 4\delta}; & a_1 = -a_2 = a_3 = -a_4; & \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow.
 \end{array}$$

Ще раз підкреслимо, що вибір нормальних мод для виродженої частоти є неоднозначним. Замість розглянутих станів $(\uparrow \cdot \downarrow \cdot)$ і $(\cdot \uparrow \cdot \downarrow)$ можна було вибрати, наприклад, такі: $(\uparrow \uparrow \downarrow \downarrow)$ і $(\uparrow \downarrow \downarrow \uparrow)$.

Розглянемо цю же задачу за відсутності зовнішнього потенціалу, тобто при $\omega_0 = 0$. При цьому $\omega_{\min} = 0$; $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{2\delta}$ і $\omega_{\max} = \sqrt{4\delta}$ і залишаються тільки три коливальні моди. Мода з нульовою частотою називається зсувною модою. Її наявність пов'язана з тим, що за відсутності зовнішнього потенціалу допускається одночасне зміщення всіх частинок уздовж кільця на довільну відстань.

4.3. Знайти спектр коливань чотириатомного ланцюжка з масами атомів, що чергуються, в скалярній моделі з періодичними граничними умовами (див. рис. 4.15).

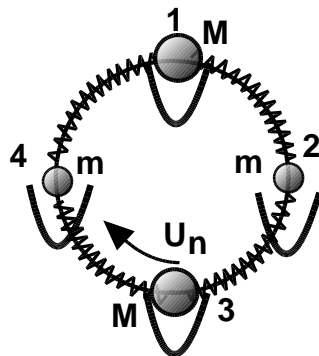


Рис. 4.15

Розв'язок. У цьому прикладі система рівнянь для коливань чотирьох частинок має вигляд:

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_1 + ku_1 + \varepsilon(2u_1 - u_2 - u_4) &= 0; \\ M\ddot{u}_2 + ku_2 + \varepsilon(2u_2 - u_3 - u_1) &= 0; \\ m\ddot{u}_3 + ku_3 + \varepsilon(2u_3 - u_4 - u_2) &= 0; \\ M\ddot{u}_4 + ku_4 + \varepsilon(2u_4 - u_1 - u_3) &= 0, \end{aligned}$$

а характеристичне рівняння зводиться до наступного:

$$\begin{aligned} (M\omega^2 - k - 2\varepsilon)(m\omega^2 - k - 2\varepsilon) \times \\ \left[\omega^4 - (M + m)(k + 2\varepsilon)\omega^2 + k(k + 4\varepsilon) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

З формули (4.42) видно, що частоти цього характеристичного рівняння збігаються з виразом (4.32) при $\kappa=0$ і $\kappa\pi$. Таким чином, розв'язок задачі із чотирма частинками дає частоти з нескінченною густиною станів на краях зон спектра нескінченного ланцюжка. Оскільки саме ці моди є найбільш важливими в експерименті, то часто досить розглянути систему з кінцевим числом ступенів свободи.

4.4. Розглянути попередню задачу 4.3 у відсутності зовнішнього пружного поля, вважаючи, що частинки з масою m мають заряд $e=1$, а частинки з масою M – заряд $e=-1$ (див. рис. 4.16). Обчислити коливання дипольного моменту системи.

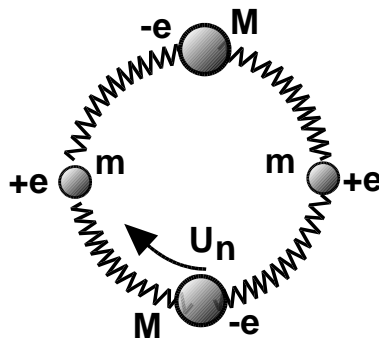


Рис. 4.16

Розв'язок. За відсутності зовнішнього потенціалу ($k=0$) для частинок з періодичним чергуванням зарядів частоти коливальних мод на границях зон і розподіл зсувів у них мають вигляд, зображений на мал. 4.17.

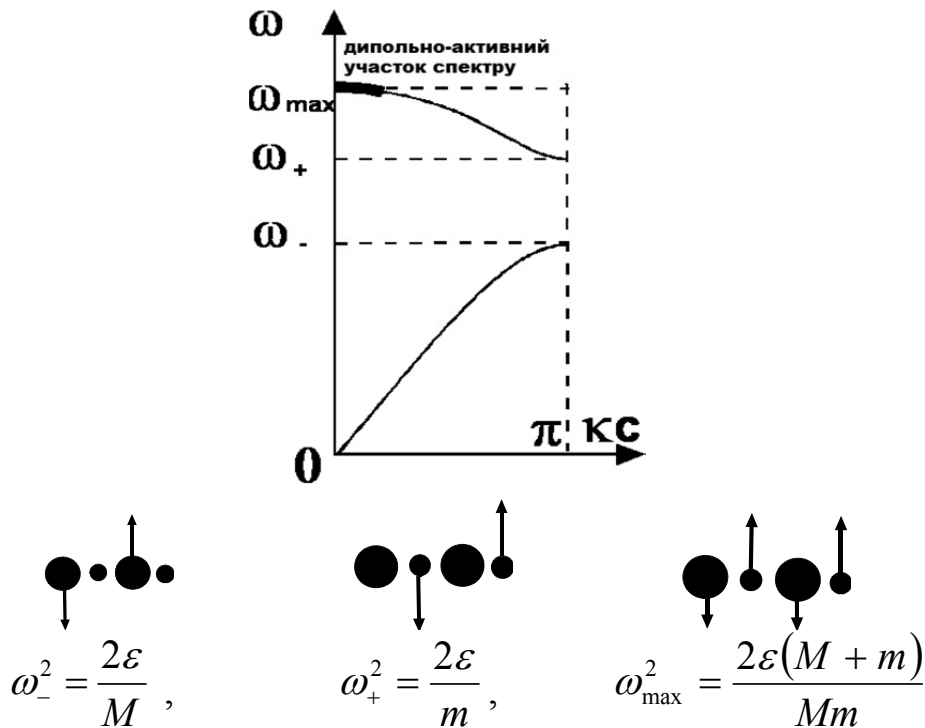


Рис. 4.17

З рис. 4.17 видно, що дві перші моди ω_{\pm} дипольно не активні. «Активною» є тільки мода з ω_{\max} . Для неї, підставляючи в співвідношення (4.31) з $k=0$ вираз для ω_{\max} , знаходимо

$$W = -\frac{M}{m}U.$$

Таким чином, дипольний момент системи дорівнює

$$d = 2e \frac{M+m}{m} \sin \omega_{\max} t.$$

Вимірюючи поглинання височастотного електромагнітного поля та знаходячи частоту максимуму цього поглинання при відомих масах атомів, легко знайти константу пружної взаємодії $\varepsilon = Mm\omega_{\max}^2/2(M+m)$.

4.5. Обчислити коливання дипольного моменту двоатомного ланцюжка іонів з подвоєнням періоду за рахунок чергування пружних констант межчастинкової взаємодії. Структура системи наведена на рис. 4.18.

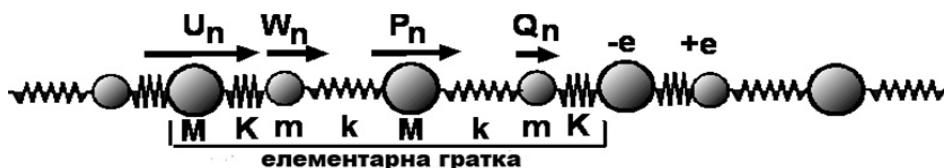


Рис. 4.18

Розв'язуючи задачу, скористатися малістю параметрів $m/M \ll 1$ і $(K - k)/K \ll 1$.

Розв'язок. У даному прикладі елементарна гратка містить 4 частинки і її довжина становить $d = 2c = 4b$. Тому спектр частот досить зобразити в інтервалі $0 \leq \kappa d \leq \pi$. Система рівнянь для амплітуд коливань виглядає так:

$$(M\omega^2 - 2E)U_n + E(W_n + Q_{n-1}) = 0;$$

$$(M\omega^2 - 2\varepsilon)P_n + \varepsilon(W_n + Q_n) = 0;$$

$$(m\omega^2 - \varepsilon - E)W_n + EU_n + \varepsilon P_n = 0;$$

$$(m\omega^2 - \varepsilon - E)Q_n + EU_{n+1} + \varepsilon P_n = 0.$$

Ці чотири рівняння можна переписати у вигляді одного рівняння для зсувів U_n :

$$\left[(m\omega^2 - \varepsilon - E)(M\omega^2 - 2E) - 2E^2 \right] \left[(m\omega^2 - \varepsilon - E)(M\omega^2 - 2\varepsilon) - 2\varepsilon^2 \right] U_n - \varepsilon^2 E^2 (2U_n + U_{n+1} + U_{n-1}) = 0.$$

Для розв'язків виду $U_n = U \cos(\kappa dn)$ отримуємо спектр власних коливань системи:

$$\left[(m\omega^2 - \varepsilon - E)(M\omega^2 - 2E) - 2E^2 \right] \left[(m\omega^2 - \varepsilon - E)(M\omega^2 - 2\varepsilon) - 2\varepsilon^2 \right] - 4\varepsilon^2 E^2 \cos^2\left(\frac{\kappa d}{2}\right) = 0.$$

Спектр частот містить чотири гілки, зображені на рис. 4.19.

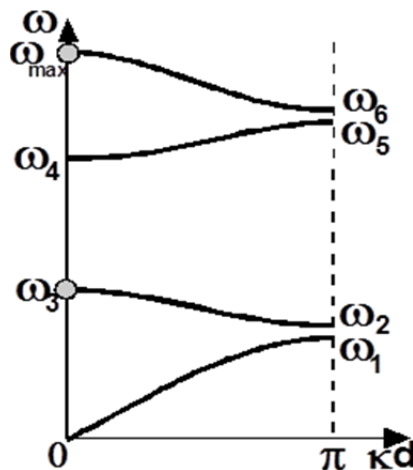


Рис. 4.19

За рахунок подвоєння періоду решітки виникають додаткові щілини в спектрі частот при значенні хвильового числа $\kappa d = \pi$. Цьому значенню відповідають протифазні коливання однотипних частинок $U_n = -U_{n+1}$; $W_n = -W_{n+1}$; $P_n = -P_{n+1}$, тобто ці коливання дипольно не активні. При $\kappa d = 0$ одна із трьох ненульових частот $\omega_4^2 = (\varepsilon + E)/m$ також відповідає дипольно неактивним коливанням. У них $U_n = 0$; $P_n = 0$; $W_n = -Q_n$ і $W_n = -Q_{n-1}$ ($\dots \cdot \uparrow \cdot \downarrow \cdot \uparrow \cdot \dots$) – важкі частинки є нерухомими, а легкі частинки коливаються у протифазі з однаковими амплітудами та нульовим дипольним моментом. Дипольно активними є тільки коливання з частотами ω_3 ω_{\max} , відзначені на рис. 4.19 кружечками. Характеристичне рівняння при $\kappa d = 0$ зводиться до вигляду:

$$\omega^2 (m\omega^2 - \varepsilon - E) \left[mM^2\omega^4 - M(M + 2m)(\varepsilon + E) + 4\varepsilon E(M + m) \right] = 0,$$

і тому для частот ω_{\max} і ω_3 отримуємо вираз:

$$\omega_{\max,3}^2 = \frac{\varepsilon + E}{2m} \left[\left(1 + 2\frac{m}{M} \right) \pm \sqrt{1 + 4\left(\frac{E - \varepsilon}{E + \varepsilon} \right)^2 \frac{m}{M} \left(1 + \frac{m}{M} \right)} \right].$$

З першими поправками по малому параметру m/M максимальна частота коливань дорівнює

$$\omega_{\max}^2 = \frac{\varepsilon + E}{m} \left[1 + 2\frac{m}{M} \frac{\varepsilon^2 + E^2}{(\varepsilon + E)^2} \right].$$

Нижче схематично наведено розподіл амплітуд коливань у цій моді: легкі частинки коливаються у фазі з більшими й однаковими амплітудами $W = Q$, а важкі частинки – у протифазі з ними зі злегка різними амплітудами (див. рис. 4.20):

$$U = -(m/M)W(E/\varepsilon) \ll W \text{ і } P = -(m/M)W \ll W.$$

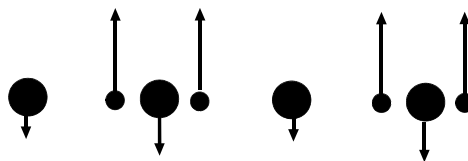


Рис. 4.20

Цей розподіл амплітуд легко отримати наближено з вихідної системи рівнянь. Таким чином, амплітуда дипольного моменту елементарної ґратки становить $d_{\max} \approx 2W$. Оскільки енергія коливання на елементарну ґратку становить $E_{\max} \approx m\omega_{\max}^2 W^2$, то $d_{\max} \approx 2\sqrt{E_{\max}/(\varepsilon + E)} \approx \sqrt{2E_{\max}/\varepsilon}$.

Дипольний момент другої активної моди є суттєво меншим. Її частота приблизно дорівнює

$$\omega_3^2 = \left(\frac{\varepsilon + E}{M} \right) \left[\frac{4\varepsilon E}{(\varepsilon + E)^2} - 2 \left(\frac{m}{M} \right)^2 \left(\frac{E - \varepsilon}{E + \varepsilon} \right)^2 \right].$$

На рис. 4.21 схематично наведено розподіл амплітуд для випадку $E > \varepsilon$: важкі частинки коливаються майже в протифазі, а легкі – у фазі з однаковими амплітудами.

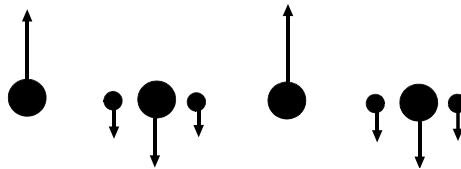


Рис. 4.21

Підставляючи вираз для частоти в основному наближенні в рівняння, знаходимо співвідношення амплітуд:

$$W = Q = \frac{E - \varepsilon}{E + \varepsilon} U = -\frac{E - \varepsilon}{E + \varepsilon} \frac{\varepsilon}{E} P.$$

Таким чином, дипольний момент елементарної ґратки $W + Q - U - P$ дорівнює $d_3 = U(E - \varepsilon)(E + 3\varepsilon)/[\varepsilon(E + \varepsilon)] \approx 2U(E - \varepsilon)/\varepsilon$. Енергія коливання елементарної ґратки $E_3 \approx M\omega_3^2 U^2$, отже, $d_3 \approx \sqrt{(2E_3/\varepsilon)}[(E - \varepsilon)/\varepsilon]$.

Тому при однакових рівнях збудження двох активних нормальних мод їхні дипольні моменти відносяться як $d_3/d_{\max} \approx (E - \varepsilon)/\varepsilon \ll 1$.

4.5. ЗАДАЧА ДО РОЗДІЛУ 4

4.6. N однакових маятників зв'язані пружинками і можуть рухатися тільки у вертикальній площині, яка проходить через горизонтальну лінію підвісу (рис. 4.22). Знайдіть нормальні коливання системи, якщо всі

маятники та пружинки однакові, а в положенні рівноваги довжина пружинки дорівнює відстані між точками підвісу сусідніх маятників.

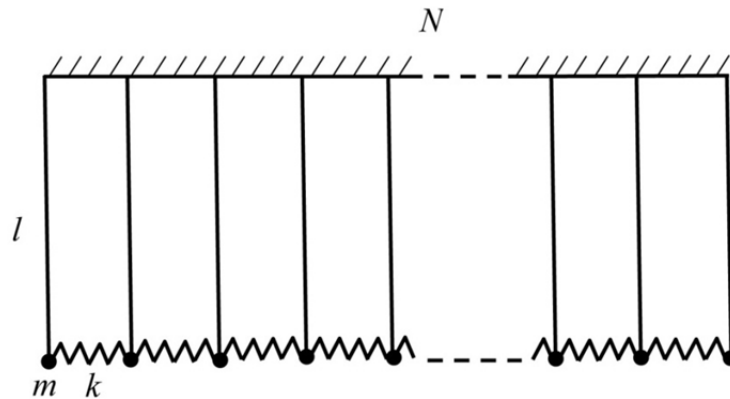


Рис. 4.22

Відповідь:

$$\varphi_n = A_s \cos \left[\frac{(2n-1)\pi s}{2N} \right] \cos(\omega_s t + \alpha_s);$$

$$\omega_s^2 = \frac{g}{l} + \frac{4k}{m} \sin^2 \left(\frac{\pi s}{N} \right), \quad s = 0, 1, \dots, N-1.$$

4.6. ЗАДАЧІ ДЛЯ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ ДО РОЗДІЛУ 4

4.7. Розглянути локальні коливання біля нижньої границі спектра у випадку зміни лише параметра зовнішнього поля для дефектної частинки.

4.8. Розглянути локальні коливання біля нижньої границі спектра у випадку зміни лише констант пружної взаємодії дефекту із сусідніми атомами.

4.9. Розглянути локальні коливання біля верхньої границі коливального спектра у випадку зміни маси дефектної частинки (ізотопичної домішки).

4.10. Нескінченний ланцюжок являє собою послідовність частинок однакової маси m , що можуть рухатися уздовж одного напрямку, з'єднаних пружинками в такий спосіб. Кожна i -а частинка з'єднана із сусідніми, $(i-1)$ -ю і $(i+1)$ -ю, пружинками з жорсткістю k , а з $(i-3)$ -ю і $(i+3)$ -ю частинками – пружинками з жорсткістю $2k$. Знайдіть розв'язки у вигляді біжучих уздовж ланцюжка хвиль. Як зв'язані частоти та хвильові числа для таких хвиль? Зобразіть цей зв'язок графічно. Напишіть розв'язок у вигляді стоячих хвиль.

4.11. По ланцюжку, розглянутому в завданні 4.10, біжить хвиля. Знайдіть середню за період коливань роботу, виконану над i -ю частинкою всіма частинками, розташованими в ланцюзі до неї. Переконайтеся, що середній за період коливань потік енергії уздовж ланцюжка дорівнює добутку лінійної густини енергії на групову швидкість хвилі.

4.12. Розглянемо тепер кінцевий фрагмент ланцюжка із завдання 4.10 довжиною N і будемо враховувати тільки взаємодії між сусідніми частинками. Нехай

а) перша частинка жорстко прикріплена до однієї стіни, а N -а – до іншої;

б) перша частинка жорстко прикріплена до стіни, а N -а – вільна;

в) увесь фрагмент ланцюжка замкнеть у кільце;

г) друга частинка жорстко закріплена, а перша й остання – вільні.

Сформулюйте граничні умови для такої системи. У якому вигляді (стоячих хвиль або біжучих) слід шукати розв'язок? Знайдіть спектр фрагмента ланцюжка. Знайдіть нормальні коливання. Що зміниться, якщо повернути далеку взаємодію, враховану в завданні 4.10?

4.13. У цьому завданні досліджується вплив точкових дефектів у кристалі. Розглянемо ланцюжок із завдання 4.10 без далекої взаємодії із граничними умовами із завдання 4.12. Дефектом у такому ланцюжку може бути частинка іншої маси або пружинка іншої жорсткості. Нехай s -а частинка має масу εm , де $\varepsilon \gg 1$. Крім «звичайних» коливань, при яких легка частинка захоплюється пружинками, є виділене коливання, при якому вона рухається на майже нерухомих пружинках, а важкі частинки роблять слабкі «змушені коливання». Знайдіть усі моди системи.

4.14. Нехай тепер у завданні 4.13 s -а частинка має масу εm , де $\varepsilon \gg 1$. Тоді крім коливань, при яких важка частинка майже не рухається, є виділене коливання, при якому вона коливається на «довгих» пружинах, а легкі частинки захоплюються цим рухом, майже не виявляючи на нього впливу. Знайдіть усі моди системи.

4.15. Нехай тепер усі частинки з парними номерами в ланцюжку із задачі 4.10 мають масу αm , відмінну від маси інших частинок. Знайдіть дисперсійні співвідношення в цьому випадку. Побудуйте дисперсійні криві. «Виключивши» далеку взаємодію, врахуйте вплив граничних умов, замкнувши фрагмент ланцюжка довжиною $2N$ в кільце. Перевірте граничний перехід до випадку $\alpha = 1$.

4.16. Пружний стрижень можна отримати, переходячи до континуальної межі в розглянутих завданнях про ланцюжки. Спрямувавши кількість частинок у задачі 4.15 до нескінченності, маси частинок і відстані a між ними до нуля, так що $Na = \text{const}$, $Nm = \text{const}$, знайдіть хвильове рівняння для стрижня.

4.17. Розглянемо модель зміни симетрії кристала. Нехай частинки із завдання 4.10, зв'язані пружинками, висять на нитках довжиною $l \gg a$, де a – відстані між частинками. Пружинки, відповідні до взаємодії найближчих частинок, спочатку стиснуті, причому відносний стиск дорівнює ε . При різних значеннях ε рівновазі такої системи може відповідати як «плоска» конфігурація, так і «гармошка». Знайдіть відповідні положення рівноваги. Отримайте дисперсійні співвідношення для ланцюжка, що коливається поблизу цих положень рівноваги. Частинки коливаються так, що нитки весь час є натягнутими, причому відхилення можливі як у площині системи, так і в перпендикулярних площинах.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. Теоретическая физика : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – Т. 1. : Механика. – 216 с.
2. Невзглядов В. Г. Теоретическая механика / В. Г. Невзглядов. – М. : Физматгиз, 1959. – 584 с.
3. Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики : в 2 ч. Ч. I / Н. Н. Бухгольц – М. : Наука, 1969. – 468 с.
4. Суслов Г. К. Теоретическая механика / Г. К. Суслов. – М. – Л. : Гостехтеориздат, 1946. – 656 с.
5. Ландау Л. Д. Задачи по теоретической физике. Ч. I. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Л. А. Розенкевич. – Х. : ГНТИУ, 1935. – 120 с.
6. Ландау Л. Д. Механика / Л. Д. Ландау, Л. М. Пятигорский. – М. – Л. : ГИТТЛ, 1940. – 200 с.
7. Маркеев А. П. Теоретическая механика : учебник для университетов / А. П. Маркеев. – М. : ЧеРо, 1999. – 572 с.
8. Сборник задач по аналитической механике / [Е. С. Пятницкий, Н. М. Трухан, Ю. И. Ханукаев, Г. Н. Яковенко]. – М. : Наука, 1980. – 320 с.
9. Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. – М. : Наука, 1986. – 448 с.
10. Ольховский И. И. Задачи по теоретической механике для физиков / И. И. Ольховский, К. Г. Павленко, Л. С. Кузьменков. – М. : Изд-во МГУ, 1977. – 391 с.
11. Ольховский И. И. Курс теоретической механики для физиков / И. И. Ольховский. – М. : Изд-во МГУ, 1978. – 575 с.
12. Компанеец А. С. Курс теоретической физики : в 2 т. Т. 1 / А. С. Компанеец. – М. : Наука, 1972. – 512 с.
13. Арнольд В. И. Математические методы классической механики / И. И. Арнольд. – М. : Наука, 1989. – 472 с.
14. Голдстейн Г. Классическая механика / Г. Голдстейню. – М. : Гостехиздат, 1957 – 413 с.
15. Коткин Г. Л. Сборник задач по классической механике / Г. Л. Коткин, В. Г. Сербо. – М. : Наука, 1977. – 319 с.
16. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1975. – 431 с.

17. Косевич А. М. Введение в нелинейную физическую механику / А. М. Косевич, А. С. Ковалев. – К. : Наук. думка, 1989. – 304 с.

18. Езерская Е. В. Динамика материальной точки в ньютоновом и лагранжевом формализме : методические указания для самостоятельной работы студентов 2–3 курсов физического факультета / Е. В. Езерская, О. В. Усатенко, Т. С. Чебанова. – Х. : Харьковское межвузовское полиграфическое предприятие, 1989. – 51 с.

19. Езерская Е. В. Колебания систем со многими степенями свободы : методические указания для самостоятельной работы студентов 2–3 курсов физического факультета / Е. В. Езерская, О. В. Усатенко, Т. С. Чебанова. – Х. : Харьковское межвузовское полиграфическое предприятие, 1989. – 38 с.